الهندسة التحليلية

المستوية



د. خيرية رمضان سيف

أ. علي جامع السيد   د. ابراهيم محمود ابراهيم

الهندسة التحليلية
المستوية

د. خيرية رمضان سيف

أ. على جامع السيد   د. إبراهيم محمود إبراهيم



الطبعة الأولى
١٤١٥هـ - ١٩٩٥م

الناشر



نشر - ترجمة - طباعة - توزيع
ت : ٢٤٢٨٨١١ - ٢٤٠٦٥٥٩
فاكس : ٢٤٥٤٧٥٩
ص.ب : ٢٣١٠٦ صفاة - الكويت

بسم الله الرحمن الرحيم

مقدمة

تعتبر الرياضيات من أعظم العلوم التي توصلت لها البشرية والتي لها الفضل الأعظم بتزويد العلوم الأخرى بأدوات التفكير وهي العامل الأساسي في نهضة الفكر العلمي . ولقد واكبت الرياضيات الحضارة البشرية وكانت من الأسباب الأولى والمباشرة في تطور الفكر والعلوم على اختلافها . ويؤكد التاريخ على أن البداية الحقيقية للرياضيات كان بظهور فرعي الحساب والهندسة كروافد رئيسية لهذا العلم ثم كان ظهور الجبر كتعميم للمشكلات الحسابية .

ومع التقدم العلمي المذهل والفيض الغزير من المعرفة الرياضية كنتاج لثورة البحث العلمي في الرياضيات كان من الطبيعي ظهور فروع جديدة من هذه المعرفة ، ومن هذا المنطلق كان ظهور الهندسة التحليلية أمراً طبيعياً فهي فرع المعرفة الرياضية الذي تم من خلاله الربط بين فرعي الهندسة والجبر . ولقد بدأت الممارسات المختلفة للهندسة التحليلية قبل اكتشافها بزمن طويل ، ولكن البداية الحقيقية لها كعلم وفن رياضي كان في القرن السابع عشر الميلادي حيث ساهمت الأبحاث العلمية في بناء هذا الفرع الرياضي الهام والذي قاد بالتالي إلى إكتشاف فروع جديدة فكانت الهندسة التحليلية هي الأساس الأول الذي ساهم في تطوير الرياضيات بداية من معالجة بعض المشكلات الهندسية بطرق تختلف عن الطريقة التركيبية التقليدية ثم كانت سبباً رئيسياً في ظهور علمي التفاضل والتكامل .

وفي الآونة الأخيرة ظهر إهتمام المشتغلين بالرياضيات في هذا الفرع من العلم الرياضي واحتلت الهندسة التحليلية مكاناً بارزاً بين مجالات المعرفة الرياضية خاصة كبداية طبيعية لعلمي التفاضل والتكامل وقد كان هذا دافعاً لعرض الهندسة التحليلية من خلال مؤلفات علمي التفاضل والتكامل . لكن الأسلوب في العرض ونقصد أسلوب التلازم بين عرض الهندسة التحليلية وعرض التفاضل والتكامل قد تسبب في أمرين هامين :

١ ـ ندرة الكتب المتخصصة في الهندسة التحليلية خاصة في المكتبة العربية .

٢ ـ العرض من خلال التفاضل والتكامل لا يحقق احتياجات الدارس بالقدر الكافي فهو يقود المتخصص إلى الاختصار والتبسيط وعدم اقتحام المشكلات الهامة ومن واقع الخبرة الطويلة في التدريس بالجامعات والمعاهد العليا وإحساسنا بما يحتاجه الطالب عند دراسته للهندسة التحليلية وما ينبغي أن يعرض كي يستطيع من خلاله أن يشبع حاجته من هذا الفرع وأن يعتمد على نفسه في التحصيل كان إعداد هذا الكتاب .

وقد أعد هذا الكتاب ليقع في أربعة أبواب في كل باب منها العرض النظري الشامل ، بجانب الأمثلة المحلولة الوفيرة ، إضافة إلى العديد من التمارين في نهاية كل جزء من أجزاء الباب الواحد .

الباب الأول : يقدم دراسة شاملة للخط المستقيم بداية من مستوى الإحداثيات وتمثيل النقطة ، والمسافة بين نقطتين ، وإحداثيات نقطة تقسيم قطعة مستقيمة ، وميل الخط المستقيم ، والعلاقة بين ميلي المستقيمان المتوازيان والمتعامدان ، والصور المختلفة لمعادلة الخط المستقيم ، وعائلة الخطوط المستقيمة وعلاقة المعادلة المتجانسة من الدرجة الثانية والخط المستقيم .

الباب الثاني : وقد خصص لدراسة الدائرة من خلال عرض الصور المختلفة لمعادلة الدائرة ، والعلاقة بين المستقيم والدائرة ، والعلاقة بين الدائرة ومحوري الإحداثيات ، معادلة وطول المماس للدائرة عند نقطة معلوم ، ومعادلة المماسين المرسومين من نقطة معلومة ، ومعادلة وتر التماس والخط القطبي لنقطة معلومة بالنسبة للدائرة ، والنقطتان المترافقتان والمثلث المترافق الذاتي للدائرة ، ومعادلة يوخمشتال ، والعلاقة بين دائرتين ، ومعادلة عائلة الدوائر التي تمر بنقطة تقاطع دائرتين ، ومعادلة المماس المشترك .

الباب الثالث : ويتضمن مفاهيم نقل ودوران المحاور ، ودوران مع الانتقال ، والقطع المكافئ ، والوتر البؤري العمودي ، ومعادلتا المماس والعمودي للقطع المكافئ عن نقطة عليه ، وشرط تماس المستقيم للقطع المكافئ ، ومعادلة الخط القطبي لنقطة معلومة بالنسبة للقطع المكافئ ، وطول تحت المماس وتحت العمودي لمنحنى ما ، والخواص الهندسية للقطع المكافئ .

الباب الرابع : ويتناول دراسة كل من القطع الناقص والقطع الزائد ، معادلة القطع الناقص ، والاختلاف المركزي ، والصورة القياسية للقطع الناقص ، وتعيين الاختلاف المركزي إذا علمت معادلة القطع ، ومعادلة القطع الناقص الناتجة من انتقال المحاور ، تعيين طول الوتر البؤري العمودي للقطع الناقص ، ومعادلتا المماس والعمودي للقطع الناقص عند نقطة عليه ، وشرط تماس المستقيم للقطع الناقص ، ومعادلة وتر التماس ، ومعادلة الخط القطبي ، وطول تحت المماس وتحت العمودي ، والخواص الهندسية للقطع الناقص وقطر القطع الناقص ، معادلة القطع الزائد ، ومعادلة القطع الزائد الناتجة من انتقال المحاور ، وتعيين طول الوتر البؤري العمودي للقطع الزائد ، ومعادلتا المماس والعمودي للقطع الزائد ، وشرط تماس المستقيم للقطع الزائد ، ومعادلة وتر التماس ، ومعادلة زوج المستقيمين المرسومين من نقطة للقطع الزائد ، والخواص الهندسية للقطع الزائد .

وفي نهاية الكتاب تم عرض بعض المصطلحات الرياضية وبعض المراجع العلمية التي تتعلق بدراسة هذا الموضوع . ولقد راعينا من خلال عرضنا للموضوعات المختلفة ان يُقدَم بأسلوب علمي يسهل على الدارس مواصلة قراءتها والإفادة منها .

ندعو الله بالتوفيق والسداد.

المؤلفون

الفهرس

رقم الصفحة

رقم الصفحة

رقم الصفحة

***

الباب الأول

الخط المستقيم

(١ ـ ١) مستوى الإحداثيات وتمثيل النقطة

(١ ـ ٢) المسافة بين نقطتين في مستوى الإحداثيات

(١ ـ ٣) إحداثيات نقطة تقسيم قطعة مستقيمة

تمارين (١ ـ ١)

(١ ـ ٤) التمثيل البياني للمعادلة والحل الهندسي .

تمارين (١ ـ ٢)

(١ ـ ٥) ميل الخط المستقيم .

(١ ـ ٦) العلاقة بين ميل الخط المستقيم وزاوية ميله .

(١ ـ ٧) العلاقة بين ميلي المستقيمين المتوازيين وميلي المستقيمين المتعامدين .

تمارين (١ ـ ٣)

(١ ـ ٨) الصور المختلفة لمعادلة الخط المستقيم .

(١ ـ ٩) إحداثيات نقطة تقاطع مستقيمين .

(١ ـ ١٠) عائلة الخطوط المستقيمة .

(١ ـ ١١) المعادلة المتجانسة من الدرجة الثانية والخط المستقيم .

تمارين (١ ـ ٤)

الباب الأول

الخـط المستقيم

(١ – ١) مستوى الإحداثيات وتمثيل النقطة:

قبل القرن السادس عشر الميلادي كان ينظر إلى الجبر والهندسة كموضوعات منفصلة تماماً .

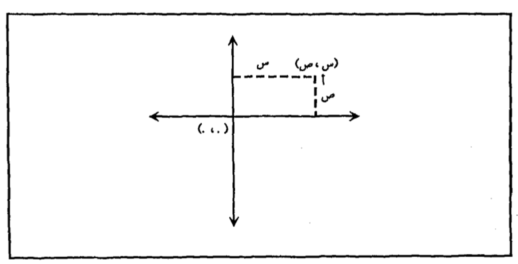
وأول من لاحظ أنه يمكن ربط الموضوعين معاً في موضوع واحد هو «رينيه ديكارت» (١٥٩٦ – ١٦٥٠) وهذا الموضوع هو ما نسميه الآن بالهندسة التحليلية .

ودراسة الهندسة التحليلية في فصولها القادمة توضح جلياً كيفية الدمج بين الجبر والهندسة معاً إذ يمكن باستخدامها تمثيل بعض المعادلات الجبرية هندسياً بواسطة المنحنيات البسيطة وهي المستقيم والدائرة والقطوع الثلاثة المكافئ والناقص والزائد . وعلى جانب آخر وصف هذه المنحنيات الهندسية بمعادلات جبرية لتوضيح مفاهيم التفاضل والتكامل .

والفكرة الأساسية لهذا الربط والتي يرجع الفضل فيها للعالم الفرنسي «ديكارت» هي تمثيل كل نقطة في المستوى ببعديها عن مستقيمين متعامدين يلتقيان في نقطة تسمى بنقطة الأصل .

وبناء على التعريف فإن إحداثيات هذه النقطة (نقطة الأصل) هي (، .) وسنرمز لها بالحرف و ويسمى المستقيمان المتعامدان بمحوري الإحداثيات

أحدهما يسمى بمحور السينات والآخر يسمى بمحور الصادات ويسمى بعدا النقطة عن كل من المحورين السيني والصادي بالإحداثي السيني والصادي للنقطة على الترتيب ويكتب هذان الإحداثيان على صورة زوج مرتب مسقطه الأول هو الإحداثي السيني ومسقطه الثاني هو الإحداثي الصادي .



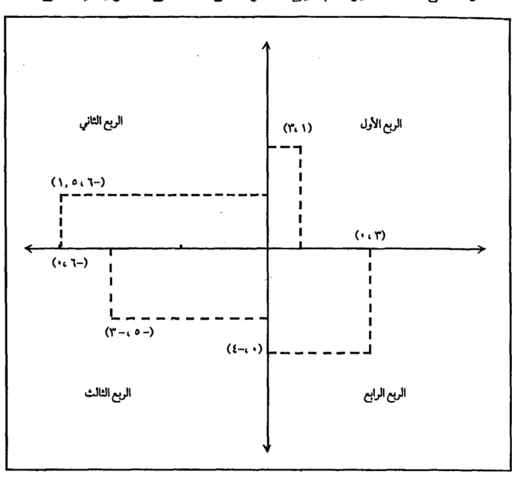
شكل (١ – ١)

فمثلاً النقطة أ الموضحة بالشكل (١ – ١) إحداثياها هي (س ، ص) . وبهذه الطريقة نكون قد خصصنا لكل نقطه في المستوى زوجاً مرتباً وحيداً من الأعداد (س ، ص) وأيضاً فإن كل زوج مرتب يخصه نقطة واحدة – وواحده فقط – في المستوى وبذلك فإنه يكون لدينا تطبيقاً من

مجموعة نقاط المستوى ⇐ { (س ، ص) : س ، ص ∋ ح }

بحيث يقرن هذا التطبيق كل نقطة في المستوى بزوج مرتب وحيد في مجموعة الأزواج المرتبة .

والشكل (١ - ٢) يوضح تمثيل مجموعة من النقاط فى المستوى الإحداثى



شكل (١-٢)

وواضح أن محورا الإحداثيات يقسمان المستوى الإحداثي إلى أربعة أرباع كل ربع عبارةعن مجموعة من النقاط ويمكن وصف كل ربع كمجموعة من النقاط كما يلي :

الربع الأول = { (س ، ص) : س > . ، ص > . : س ، ص ∈ ح } .

الربع الثاني = { (س ، ص) : س < . ، ص > . : س ، ص ∈ ح } .

الربع الثالث = { (س ، ص) : س < . ، ص < . : س ، ص ∈ ح } .

الربع الرابع = { (س ، ص) : س > . ، ص < . : س ، ص ∈ ح } .

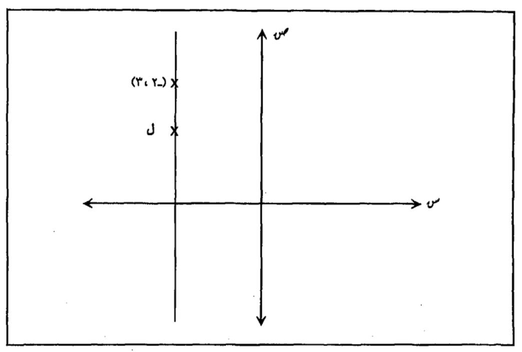
كذلك فإن كلا من المحور السيني والمحور الصادي يمكن وصفهما كمجموعة من النقاط كما يلي :

المحور السيني = { (س ، ص) : س ∋ ح ، ص = ٠ }

المحور الصادي = { (س ، ص) : ص ∋ ح ، س = ٠ }

مثال (١ ـ ١) :

اكتب مجموعة النقاط التي تمثل المستقيم الذي يوازي محور الصادات ويمر بالنقطة (ـ٢ ، ٣) .



شكل (١ – ٣)

ل يوازي محور الصادات انظر شكل (١ـ٣)

∴ بعد المستقيم عن محور الصادات = مقدار ثابت

∴ الإحداثي السيني لأي نقطة عليه = ثابت

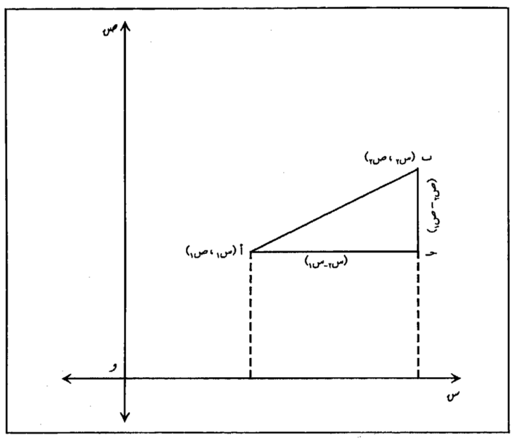
∴ المستقيم يمر بالنقطة (ـ ٢ ,٣)

∴ الإحداثي السيني = ـ٢ دائماً .

وصف المستقيم :

ل = { (س ، ص) : س = - ٢ ، ص ∈ ح }

(١ ـ ٢) المسافة بين نقطتين في مستوى الإحداثيات:



شكل (١ - ٤)

نفـرض أن النقطتين أ ، ب تتعينان في مستوى الإحداثيات بالزوجين المرتبين (س١ ، ص١) ، (س٢ ، ص٢) على الترتيب ولتعيين المسافة |أ ب| فإننا :

نحدد النقطتين أ ، ب كما في شكل (١ - ٤) ونصل بينهما ونحدد الإحداثي السيني والإحداثي الصادي لكل نقطة على الرسم ثم نكمل المثلث القائم الزاوية أ حـ ب .

فنجد أن $|أحـ| = س_٢ - س_١$

، $|حـب| = ص_٢ - ص_١$

وبتطبيق نظرية فيثاغورث في المثلث أ حـ ب

$$\therefore |أب|^٢ = |أحـ|^٢ + |حـب|^٢$$

$$= |س_٢ - س_١|^٢ + |ص_٢ - ص_١|^٢$$

$$\therefore ف = |أب| = \sqrt{|س_٢ - س_١|^٢ + |ص_٢ - ص_١|^٢} .$$

والقانون السابق يسمى بقانون البعد أو قانون المسافة بين نقطتين .

نتيجة (١) :

البعد بين النقطتين أ $\equiv$ (س$_١$ ، ص$_١$) ، ونقطة الأصل .

$$|أو| = \sqrt{|س_١ - ٠|^٢ + |ص_١ - ٠|^٢}$$

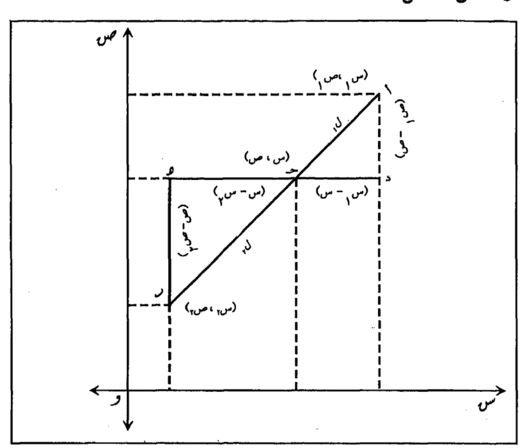
$$= \sqrt{س_١^٢ + ص_١^٢}$$

استخدمنا الرمز |أ ب| للدلالة على قياس القطعة المستقيمة أ ب

أي أن |أ ب| نعني بها البعد أو المسافة بين النقطتين أ ، ب .

(١ ـ ٣) إحداثيات نقطة تقسيم قطعة مستقيمة.

أولاً : من الداخل :



شكل (١ ـ ٥)

لنفرض القطعة المستقيمة أ ب حيث

أ ≡ (س$_١$ ، ص$_١$) ، ب ≡ (س$_٢$ ، ص$_٢$)

حـ ≡ (س ، ص) تقسم المسافة بين أ ، ب من الداخل بنسبة ل$_١$: ل$_٢$

من شكل (١ـ٥) ومن تشابه المثلثين أ حـ د ، ب حـ هـ

نجد أن :

$$\frac{|أ د|}{|ب هـ|} = \frac{|د حـ|}{|حـ هـ|} = \frac{ل_١}{ل_٢}$$

$$\Leftarrow \quad \frac{\text{ص}_1 - \text{ص}}{\text{ص} - \text{ص}_2} = \frac{\text{س}_1 - \text{س}}{\text{س} - \text{س}_2} = \frac{\text{ل}_1}{\text{ل}_2}$$

ومنها $$\frac{\text{س}_1 - \text{س}}{\text{س} - \text{س}_2} = \frac{\text{ل}_1}{\text{ل}_2}$$

$$\Leftarrow \quad \text{ل}_2(\text{س}_1 - \text{س}) = \text{ل}_1(\text{س} - \text{س}_2)$$

$$\Leftarrow \quad \text{ل}_2\text{س}_1 - \text{ل}_2\text{س} = \text{ل}_1\text{س} - \text{ل}_1\text{س}_2$$

$$\Leftarrow \quad \text{ل}_2\text{س}_1 + \text{ل}_1\text{س}_2 = \text{ل}_1\text{س} + \text{ل}_2\text{س}$$

$$\Leftarrow \quad \text{ل}_1\text{س}_2 + \text{ل}_2\text{س}_1 = (\text{ل}_1 + \text{ل}_2)\text{س}$$

$$\therefore \quad \text{س} = \frac{\text{ل}_1\text{س}_2 + \text{ل}_2\text{س}_1}{\text{ل}_1 + \text{ل}_2}$$

وبالمثل فإن $$\text{ص} = \frac{\text{ل}_1\text{ص}_2 + \text{ل}_2\text{ص}_1}{\text{ل}_1 + \text{ل}_2}$$

∴ إحداثيات نقطة التقسيم حـ $$\equiv \left(\frac{\text{ل}_1\text{س}_2 + \text{ل}_2\text{س}_1}{\text{ل}_1 + \text{ل}_2} \text{ ، } \frac{\text{ل}_1\text{ص}_2 + \text{ل}_2\text{ص}_1}{\text{ل}_1 + \text{ل}_2} \right)$$

والطريقة التالية تسهل لك كتابة إحداثي نقطة التقسيم :

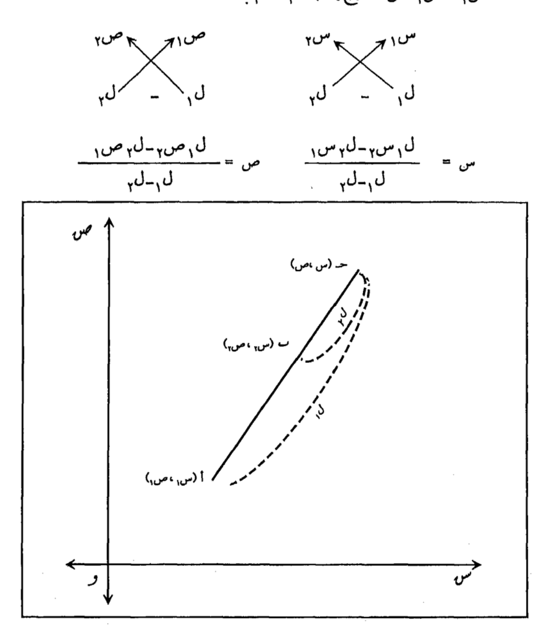
$$\begin{array}{ccc} \text{س}_1 & + & \text{س}_2 \\ & \times & \\ \text{ل}_1 & + & \text{ل}_2 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} \text{ص}_1 & + & \text{ص}_2 \\ & \times & \\ \text{ل}_1 & + & \text{ل}_2 \end{array}$$

$$\text{س} = \frac{\text{ل}_1\text{س}_2 + \text{ل}_2\text{س}_1}{\text{ل}_1 + \text{ل}_2} \qquad\qquad \text{ص} = \frac{\text{ل}_1\text{ص}_2 + \text{ل}_2\text{ص}_1}{\text{ل}_1 + \text{ل}_2}$$

ثانياً : التقسيم من الخارج

بنفس الطريقة السابقة ومن الرسم الموضح شكل (١ - ٦) يمكننا استنتاج إحداثياً النقطة التي تقسم القطعة المستقيمة أ ب حيث أ ≡ (س$_1$ ، ص$_1$) ، ب ≡ (س$_2$ ، ص$_2$) من الخارج بنسبة ل$_1$: ل$_2$.

$$س = \frac{ل_1 س_2 - ل_2 س_1}{ل_1 - ل_2} \qquad ص = \frac{ل_1 ص_2 - ل_2 ص_1}{ل_1 - ل_2}$$



شكل (١ - ٦)

نتــائــج :

(١) إحداثيات نقطة تنصيف قطعة مستقيمة .

نفرض القطعة المستقيمة أ ب

حيث أ ≡ (س ١ ، ص ١) ، ب (س ٢ ، ص ٢)

بفرض أن حـ ≡ (س ، ص) بحيث أ حـ = حـ ب

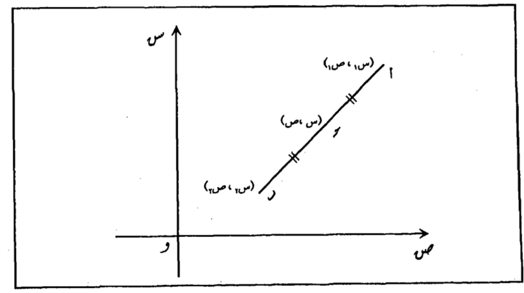
أي أن حـ في منتصف أ ب (شكل ١ـ٧)

$$س = \frac{١ \times س_١ + ١ \times س_٢}{١ + ١} = \frac{س_١ + س_٢}{٢}$$

$$ص = \frac{١ \times ص_١ + ١ \times ص_٢}{١ + ١} = \frac{ص_١ + ص_٢}{٢}$$

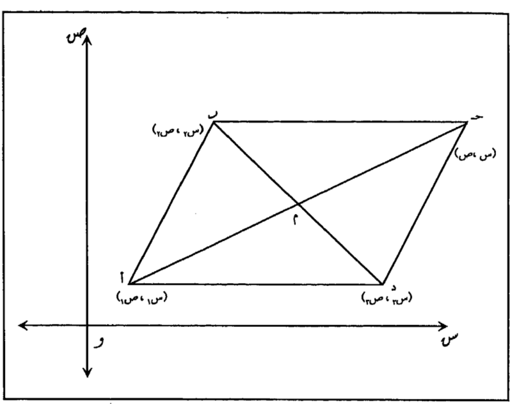
وذلك باعتبار أن النسبة أ حـ : حـ ب = ١ : ١

$$\therefore حـ \equiv \left(\frac{س_١ + س_٢}{٢} \ ، \ \frac{ص_١ + ص_٢}{٢} \right)$$



شكل (١ - ٧)

(٢) إحداثيات الرأس الرابع في متوازي الأضلاع :



شكل (١ -٨)

يمكن استخدام النتيجة السابقة (١) في إيجاد إحداثيات الرأس الرابع في متوازي الأضلاع .

فإذا علمت ثلاثة رؤوس من متوازي الأضلاع أ ب حـ د

أ ≡ (س$_{1}$ ، ص$_{1}$) ، ب ≡ (س$_{2}$ ، ص$_{2}$) ، د ≡ (س$_{3}$ ، ص$_{3}$)

والمطلوب تعيين إحداثيات الرأس الرابع حـ ≡ (س ، ص) .

[انظر شكل (١ـ٨)] .

فمن خواص متوازي الأضلاع :

م ملتقى القطرين $\overline{أ حـ}$ ، $\overline{ب د}$

∴ م هي منتصف كل منهما

∴ إحداثيات م هي

من منتصف $\overline{أ حـ}$ $\left(\frac{س + س_1}{2} ، \frac{ص + ص_1}{2} \right)$

، إحداثيات م أيضاً هي :

من منتصف $\overline{ب د}$ $\left(\frac{س_2 + س_3}{2} ، \frac{ص_2 + ص_3}{2} \right)$

∴ $\frac{س + س_1}{2} = \frac{س_2 + س_3}{2}$ (١)

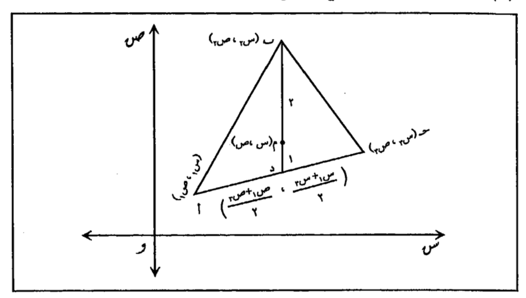
∴ $\frac{ص + ص_1}{2} = \frac{ص_2 + ص_3}{2}$ (٢)

ومن (١) ، (٢) ∴ $س = س_2 + س_3 - س_1$ ، $ص = ص_2 + ص_3 - ص_1$

∴ إحداثيات الرأس الرابع

$حـ \equiv (س_2 + س_3 - س_1 ، ص_2 + ص_3 - ص_1)$

(٣) إحداثيات نقطة تلاقي القطع المتوسطة للمثلث



شكل (١ -٩)

إذا كان أ ب حـ مثلث رؤوسه على الترتيب هي

(س١ ، ص١) ، (س٢ ، ص٢) ، (س٣ ، ص٣) على الترتيب

م ملتقى القطع المتوسطة في المثلث

المطلوب : تعيين إحداثيات النقطة م (س ، ص)

∴ $\overline{\text{ب د}}$ قطعة متوسطة في المثلث أ ب حـ

∴ د في منتصف $\overline{\text{أ حـ}}$

∴ إحداثيات د هي $\left(\frac{\text{س}_1 + \text{س}_3}{2} \text{ ، } \frac{\text{ص}_1 + \text{ص}_3}{2} \right)$ نتيجة (١)

النقطة م (نقطة تلاقي القطع المتوسطة) تقع على القطعة المتوسطة $\overline{\text{ب د}}$ وتقسمها من الداخل بنسبة ١ : ٢ من جهة د .

باستخدام قانون التقسيم من الداخل يمكن إيجاد إحداثيات م

$$\text{س} = \frac{1 \times \text{س}_2 + 2 \times \frac{\text{س}_1 + \text{س}_3}{2}}{1 + 2} \quad ، \quad \text{ص} = \frac{1 \times \text{ص}_2 + 2 \times \frac{\text{ص}_1 + \text{ص}_3}{2}}{1 + 2}$$

ومنها

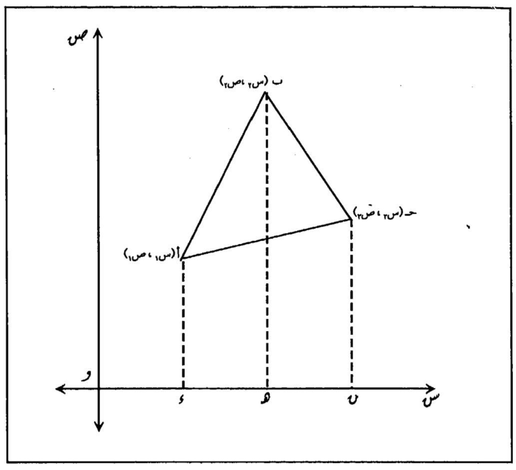
$$\text{س} = \frac{\text{س}_1 + \text{س}_2 + \text{س}_3}{3} \quad ، \quad \text{ص} = \frac{\text{ص}_1 + \text{ص}_2 + \text{ص}_3}{3}$$

∴ إحداثيات نقطة تلاقي القطع المتوسطة هي :

$$\text{م} \equiv \left(\frac{\text{س}_1 + \text{س}_2 + \text{س}_3}{3} \; ، \; \frac{\text{ص}_1 + \text{ص}_2 + \text{ص}_3}{3} \right)$$

نظرية :(١ـ١)

إيجاد مساحة المنطقة المثلثية إذا علمت إحداثيات الرؤوس الثلاثة



شكل (١ - ١٠)

نفرض أ ب حـ مثلث إحداثيات رؤوسه أ ، ب ، حـ هي على الترتيب (س١، ص١) ، (س٢، ص٢) ، (س٣، ص٣)

المطلوب :

إيجاد مساحة المنطقة المثلثية أ ب حـ .

البرهان :

باستخدام الرسم الموضح شكل (١-١٠) .

مساحة المنطقة المثلثية أ ب حـ

=| مساحة المنطقة شبه المنحرفة أ ب هـ د + مساحة المنطقة شبه المنحرفة ب هـ ن حـ - مساحة المنطقة شبه المنحرفة أ د ن حـ |

$$= \left| \frac{١}{٢} (\text{ص}_{٢} + \text{ص}_{١}) \quad (\text{س}_{٢} - \text{س}_{١}) \right.$$

$$+ \frac{١}{٢} (\text{ص}_{٣} + \text{ص}_{٢}) \quad (\text{س}_{٣} - \text{س}_{٢})$$

$$\left. - \frac{١}{٢} (\text{ص}_{٣} + \text{ص}_{١}) \quad (\text{س}_{٣} - \text{س}_{١}) \right|$$

$$= \left| \frac{١}{٢} \right. \Big[(\text{ص}_{٢}\text{س}_{٢} - \text{ص}_{٢}\text{س}_{١} + \text{ص}_{١}\text{س}_{٢} - \text{ص}_{١}\text{س}_{١})$$

$$+ \text{ص}_{٣}\text{س}_{٣} - \text{ص}_{٣}\text{س}_{٢} + \text{ص}_{٢}\text{س}_{٣} - \text{ص}_{٢}\text{س}_{٢}$$

$$- \text{ص}_{٣}\text{س}_{٣} + \text{ص}_{٣}\text{س}_{١} - \text{ص}_{١}\text{س}_{٣} + \text{ص}_{١}\text{س}_{١} \Big]$$

$$\therefore \text{مساحة } \Delta \text{ أ ب حـ} = \frac{١}{٢} \left| \text{س}_{١} (\text{ص}_{٣} - \text{ص}_{٢}) + \text{س}_{٢} (\text{ص}_{١} - \text{ص}_{٣}) \right.$$

$$\left. + \text{س}_{٣} (\text{ص}_{٢} - \text{ص}_{١}) \right|$$

$$= \frac{١}{٢} \left| \text{س}_{١} (\text{ص}_{٣} - \text{ص}_{٢}) - \text{س}_{٢} (\text{ص}_{٣} - \text{ص}_{١}) \right.$$

$$\left. + \text{س}_{٣} (\text{ص}_{٢} - \text{ص}_{١}) \right|$$

ويمكن كتابها بصورة المحدد كما يلي :

$$= \frac{١}{٢} \left| \begin{vmatrix} \text{س}_{١} & ١ & \text{ص}_{١} \\ \text{س}_{٢} & ١ & \text{ص}_{٢} \\ \text{س}_{٣} & ١ & \text{ص}_{٣} \end{vmatrix} \right|$$

$$\text{إذاً مساحة المنطقة المثلثية أ ب حـ} = \frac{١}{٢} \begin{vmatrix} \text{س}_{١} & \text{ص}_{١} & ١ \\ \text{س}_{٢} & \text{ص}_{٢} & ١ \\ \text{س}_{٣} & \text{ص}_{٣} & ١ \end{vmatrix} \quad (١)$$

$$= \frac{١}{٢} \Delta$$

حيث Δ = المحدد المذكور في (١)

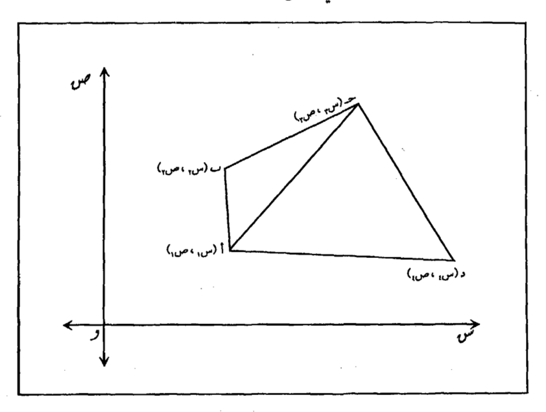
نتائج :

(١) تكون النقط الثلاث أ ، ب ، حـ على إستقامه واحده إذا كان مساحة المنطقة المثلثية أ ب حـ = ٠

أي أن الشرط اللازم لتقع النقط الثلاث أ ، ب ، حـ على إستقامة واحدة هو :

$$\Delta = ٠$$

(٢) يمكن باستخدام هذه النظرية تعيين مساحة أي منطقة رباعية معلوم رؤوسها الأربعة وذلك بتقسيمها إلى منطقتين مثلثتين بتوصيل أحد الأقطار وباستخدام النظرية يمكن إيجاد مساحة كلا من المنطقتين المثلثتين وبجمعهما يمكن إيجاد مساحة المنطقة الرباعية كما في شكل (١-١١) .

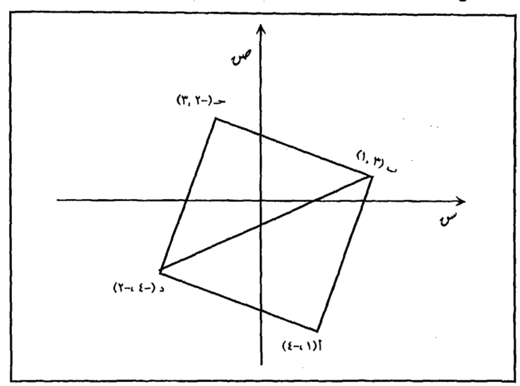


شكل (١-١١)

مثال (١-٢) :

أثبت أن النقط أ (١ ، -٤) ، ب (٣ ، ١) ، حـ (-٢ ، ٣) ، د (-٤ ، -٣)
هي رؤوس مربع وأوجد مساحة المنطقة المربعة أ ب حـ د

الحـــل :



شكل (١ - ١٢)

|أ ب|^{٢} = (١ - ٣)^{٢} + (-٤ - ١)^{٢} = ٢٥ + ٤ = ٢٩

|ب حـ|^{٢} = (-٢ - ٣)^{٢} + (٣ - ١)^{٢} = ٢٥ + ٤ = ٢٩

|حـ د|^{٢} = (-٤ + ٢)^{٢} + (-٢ - ٣)^{٢} = ٢٥ + ٤ = ٢٩

|د أ|^{٢} = (-٢ + ٤)^{٢} + (-٤ - ١)^{٢} = ٤ + ٢٥ = ٢٩

إذن |أ ب| = |ب حـ| = |حـ د| = |د أ|

الأضلاع الأربعة متساوية في الطول

∴ الشكل إما مربع أو معين

ولكن $|ب د|^2 = (1+2)^2 + (3+4)^2$

$= 9 + 49$

$= 58$

$|د أ|^2 + |أ ب|^2 = 29 + 29$

$= 58$

∴ $|ب د|^2 = |د أ|^2 + |أ ب|^2$

∴ $\hat{أ}$ قائمة

∴ الشكل أ ب حـ د مربع

وتكون مساحة المنطقة المربعة = $\sqrt{29} \times \sqrt{29}$

= 29 وحدة مربعة

مثال (1ـ3) :

أ هي النقطة (1 ، 2) ، ب هي النقطة (−1 ، 5) ، حـ تقسم $\overline{أ ب}$ من الداخل بنسبة 1 : 3 أوجد بعد النقطة حـ عن نقطة الأصل .

الحـــل : (إحداثيات حـ) :

س : 1 ↗ −1 ، 1 ↖ 3 (+)

ص : 2 ↗ 5 ، 1 ↖ 3 (+)

$س = \frac{1 \times -1 + 3 \times 1}{1 + 3}$

$= \frac{-1 + 3}{4} = \frac{1}{2}$

$ص = \frac{1 \times 5 + 3 \times 2}{1 + 3}$

$= \frac{5 + 6}{4} = \frac{11}{4}$

∴ حـ ≡ $(\frac{1}{2} ، \frac{11}{4})$

$$|حـو| = \sqrt{س^{٢} + ص^{٢}} = \sqrt{\frac{١}{٤} + \frac{١٢١}{١٦}} = \sqrt{\frac{٤}{١٦} + \frac{١٢١}{١٦}}$$

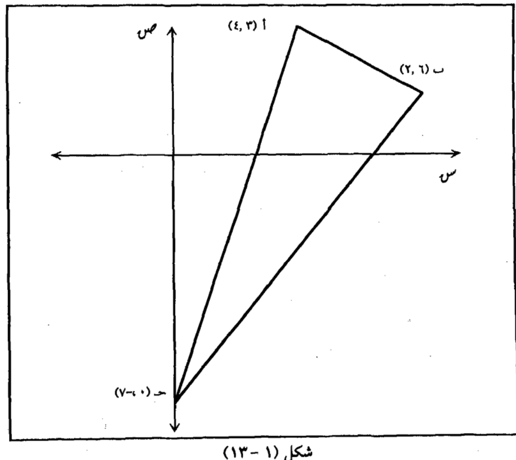
$$= \sqrt{\frac{١٢٥}{١٦}}$$

$$= \frac{٥\sqrt{٥}}{٤} \text{ وحدة طول}$$

مثال (١ – ٤) :

أثبت أن المثلث الذي رؤوسه أ ≡(٣ ، ٤) ، ب ≡ (٦ ، ٢) ، حـ ≡ (٠ ، –٧) قائم الزاوية ثم أوجد مساحة المنطقة المثلثية أ ب حـ .

الحـــل :



شكل (١ – ١٣)

$|أب|^2 = (٤-٦)^2 + (٤-٢)^2 = ١٣$

$|ب حـ|^2 = (٠-٦)^2 + (-٧-٢)^2 = ١١٧$

$|أ حـ|^2 = (-٣-٠)^2 + (٤+٧)^2 = ١٣٠$

$|أب|^2 + |ب حـ|^2 = ١٣ + ١١٧ = ١٣٠$

$\therefore |أ حـ|^2 = |أب|^2 + |ب حـ|^2$

∴ المثلث قائم الزاوية في ب

(انظر الشكل «١ - ١٣»)

مساحة المنطقة المثلثة أ ب حـ

$= \frac{١}{٢} |ب حـ| \times |أ ب|$

$= \frac{١}{٢} \sqrt{١١٧} \sqrt{١٣}$

$= \frac{١}{٢} \sqrt{١٣^2 \times ٣^2} = \frac{١}{٢} \times ١٣ \times ٣$

$= \frac{٣٩}{٢}$ وحدة مربعة

مثال (١ـ٥) :

أ ب حـ مثلث رؤوسه هي النقط أ(-٢ ، ٤) ، ب(-١ ، ٣) ، حـ(٢ ، ٧)
أوجد مساحة المنطقة المثلثية أ ب حـ .

الحـــل :

$$\text{مساحة المنطقة المثلثية} = \frac{١}{٢} \begin{vmatrix} -٢ & ٤ & ١ \\ -١ & ٣ & ١ \\ ٢ & ٧ & ١ \end{vmatrix}$$

= ١/٢ | {-٢ (٣×١ - ٧×١) + -١ (٧×١ - ٤×١) + ٢ (٤×١ - ٣×١)} |

= ١/٢ | {-٢ (٣-٧) - ١ (٧-٤) + ٢ (٤-٣)} |

= ١/٢ | {(-٢×-٤) - (١×٣) + ٢×١} |

= ١/٢ | ٨-٣+٢ |

= ١/٢ (٧) = ٣ ١/٢ وحدة مربعة

مثال (١ ـ ٦) :

أثبت أن النقط الثلاث أ (-٣ ، -٤) ، ب (٦ ، ٨) ، ونقطة الأصل و تقع على استقامة واحدة .

شرط وقوع النقط الثلاث على إستقامة واحدة هو Δ = ٠

-٣	-٤	١
٦	٨	١
٠	٠	١

Δ = المحدد أعلاه

= -٣ (٨×١ - ٠×١) + ٦ (٠×١ - (-٤)×١) + صفر

= -٣×٨ + ٦×٤ = ٢٤ - ٢٤ = صفراً

∴ النقط الثلاثة أ ، ب ، و تقع على استقامة واحدة .

* * *

تمارين (١-١)

(١) أوجد طول المستقيم المتوسط المار بالنقطة أ للمثلث الذي رؤوسه هي أ(-٢ ، -٦) ، ب (٦ ، -١) ، حـ(٠ ، ٥) .

(٢) مربع طول ضلعه ٥ سم ورؤوسه الأربعة تقع على محاور الإحداثيات أوجد إحداثيات هذه الرؤوس .

(٣) أ ب حـ مثلث متساوي الأضلاع فإذا كانت النقطة أ (ل ، ٠) ، ب (-ل ، ٠) فأوجد إحداثيات الرأس الثالث حـ .

(٤) أ ب حـ د متوازي أضلاع رؤوسه الثلاثة الأولى هي على الترتيب (١ ، -٥) ، (-٢ ، ٣) ، (١ ، ٢) أوجد إحداثيات الرأس الرابع .

(٥) أوجد مساحة المثلث أ ب حـ الذي رؤوسه أ (-٣ ، ١) ، ب (-١ ، ٣) ، حـ (٥ ، ٣) .

(٦) اثبت أن النقط الثلاث أ (-٢ ، -٢) ، ب (٢ ، ١) ، حـ (٦ ، ٤) تقع على استقامة واحدة .

(٧) أ ب حـ مثلث بحيث أ (-١ ، ٢) ، ب (٣ ، -٥) ، حـ (١ ، -٢) أوجد إحداثيات نقطة تلاقي المستقيمات المتوسط للمثلث أ ب حـ .

(٨) أ ب حـ د متوازي أضلاع رؤوسه هي على الترتيب (ك ، -١) ، (٢ ، ل) ، (٥ ، ٤) ، (٣ ، -٢) أوجد قيمة كل من ل ، ك ثم أوجد مساحة المنطقة أ ب حـ د .

***

(١ ـ ٤) التمثيل البياني للمعادلة والمحل الهندسي:

إذا علمت معادلة منحنى ما مثل ص = $\frac{١}{٣}$ س - ١ (١)

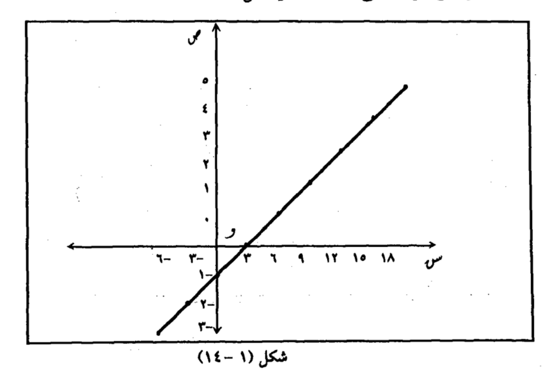
فإن من السهولة أن نحصل على مجموعة من الأزواج المرتبة (س ، ص) بحيث يحقق كل منها المعادلة (١) ويتم ذلك باختيار قيم مناسبة ل س وباستخدام المعادلة يمكننا الحصول على القيم المناظرة ل ص .

فمثلاً باختيار س = ١٥

فإن ص = $\frac{١}{٣}$ × ١٥ - ١ = ٤ وعليه فان (١٥ ، ٤) تمثل إحدى الأزواج المرتبة التي تحقق المعادلة (١) وبتكرار العمل يمكننا الحصول على مجموعة مناسبة من الأزواج المرتبة وكتابتها في صورة جدول كالتالي :

س	-٦	-٣	٠	٣	٦	٩	١٢	١٥	١٨
ص =($\frac{١}{٣}$ س - ١)	-٣	-٢	-١	٠	١	٢	٣	٤	٥

ثم يمكننا بعد ذلك تمثيل كل زوج مرتب من الأزواج المرتبة التي حصلنا عليها بنقطة في مستوى الإحداثيات وبتوصيل هذه النقط فإننا نحصل على التمثيل البياني للمعادلة ونطلق عليه منحنى المعادلة . أنظر شكل (١ـ١٤)



شكل (١ - ١٤)

تعريف :

التمثيل البياني لأي معادلة هو مجموعة جميع النقاط (س ، ص) التي تقع في المستوى الإحداثي وتحقق هذه المعادلة .

كما يقال إن المعادلة في (س ، ص) تمثل منحنى ما إذا كانت تتحقق بإحداثي أي نقطة تقع على هذا المنحنى .

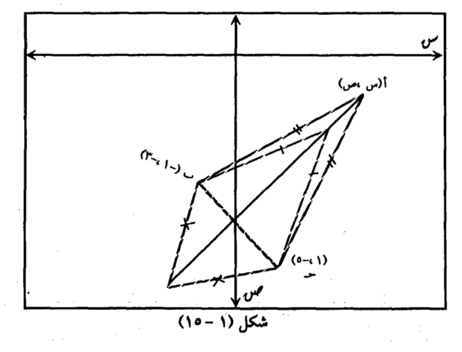
تعريف :

إن أي معادلة في الصورة د (س ، ص) تصف مجموعة من النقاط هي المحل الهندسي لجميع تلك النقاط فعلى سبيل المثال إذا كان المحل الهندسي منحنيا فإنه يجب على كل نقطة في المنحنى أن تحقق معادلته وأيضا يجب على كل نقطة تحقق المعادلة أن تقع على المنحنى .

مثال (١ـ٧) :

أوجد المحل الهندسي لنقط تتحرك بحيث تكون دائما على بعدين متساويين من النقطتين ب (-١ ، -٣) ، حـ (١ ، -٥) .

الحل :



شكل (١ - ١٥)

خطوات الحل :

(١) نفرض النقطة أ ≡ (س ، ص) تحقق الشرط

(٢) نكتب الشرط هندسياً | أ ب | = | أ حـ |

(٣) نترجم الشرط الهندسي إلى علاقة جبرية فباستخدام قانون البُعد

$$\sqrt{(س - ١)^٢ + (ص + ٥)^٢} = \sqrt{(س + ١)^٢ + (ص + ٣)^٢}$$

⇐ س^٢ -٢ س+١ + ص^٢ +٥ص+ ٢٥ = س^٢ + ٢س + ١ +ص^٢ + ٦ص + ٩

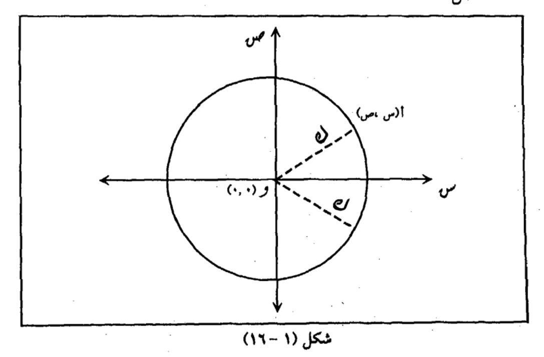
⇐ ٤ س -٤ ص - ١٦ = ٠

⇐ س - ص - ٤ = ٠

وهذه هي معادلة المحل الهندسي المطلوب

مثال (١ ـ ٨) :

أوجد المحل الهندسي لنقطة تتحرك بحيث تكون على بعد ثابت قدرة ك من نقطة الأصل .



شكل (١ - ١٦)

نتبع نفس الخطوات كما في المثال السابق كما يلي :

نفرض أن النقطة المتحركة أ $\equiv$ (س ، ص)

$|و أ| =$ ك

$\sqrt{(س - ٠)^٢ + (ص - ٠)^٢} =$ ك

$س^٢ + ص^٢ = ك^٢$

وهذه هي معادلة المحل الهندسي للنقطة وستتعرف عليها فيما بعد (تمثل دائرة مركزها و ونصف قطرها ك) .

***

تمارين (١ - ٢)

(١) إرسم منحنى كلا مما يأتي :

أ - ص = $س^٢$

ب - ص = $س^٣$

جـ - $س^٢ + ص^٢ = ٢٥$

د - ص = |س|

(٢) إذا كانت النقط (١ ، ٥) ، (٣ ، ١١) تقع على المنحنى الذي معادلته ص = أ س + ب فأوجد كلا من الثابتين أ ، ب .

(٣) إذا مر المنحنى ص = أ $س^٢$ + ب س + حـ بالنقط الثلاث (١ ، ٠) ، (٢ ، ٠) ، (٣ ، ٢) فأوجد قيمة كلا من أ ، ب ، حـ

(٤) أوجد المحل الهندسي في (أبسط صورة) لكل مما يأتي :

أ - النقطة حـ متساوية البعد عن النقطتين (٢ ، ٥) ، (٤ ، ٣)

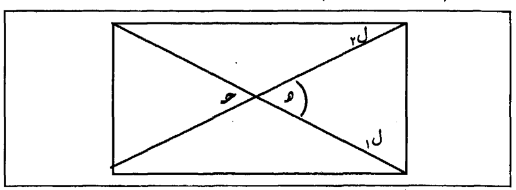
ب - النقطة حـ تبعد ٧ وحدات عن النقطة (١ ، ٢)

حـ - النقطة حـ تبعد عن النقطة (٢ ، ٠) بعداً يساوي ضعف بعدها عن النقطة (-٢ ، ٣)

***

(١ـ٥) ميل الخط المستقيم :

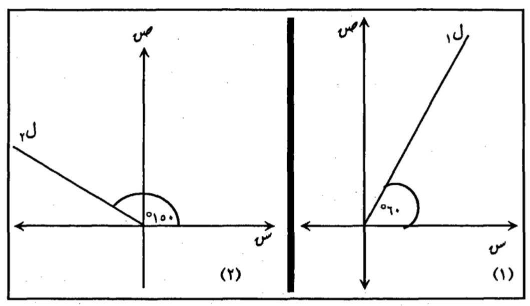
تقديم : الزاوية من مستقيم لآخر :



شكل (١ - ١٧)

إذا كان لدينا مستقيمان ل١ ل٢ كما في شكل (١ ـ ١٧) بحيث ل١ ∩ ل٢ = حـ فإذا دار ل١ في إتجاه مضاد لعقاب الساعة إلى أن ينطبق على ل٢ فإن الزاوية الموجبة التي دارها تسمى الزاوية من المستقيم ل١ إلى المستقيم ل٢ فإذا رمزنا لهذه الزاوية بالرمز هـ فإنه من الواضح أن هـ تنحصر بين ٠ ، ١٨٠° أي أن ٠ ≤ هـ ≤ ١٨٠°

زاوية ميل الخط المستقيم :



شكل (١ - ١٨)

تعريف :

زاوية ميل خط مستقيم هي الزاوية المرسومة من محور السينات إلى الخط المستقيم . ففي الشكل (١ ـ ١٨) زاويتا الميل للمستقيمين $ل_1$ ، $ل_2$ هما ٦٠°، ١٥٠°

ويمكننا أن نصف المستقيم $ل_1$ بالقول أنه صاعداً .
كما يمكننا وصف المستقيم $ل_2$ بالقول أنه هابطاً .

وعلى ذلك فإن المستقيم يكون صاعداً إذا كانت زاوية ميله تنحصر بين ٠° ، ٩٠° ويكون المستقيم هابطاً إذا كانت زاوية ميله محصور بين ٩٠° ، ١٨٠° .

لكنه باستطاعتنا قياس معدل صعود المستقيم أو هبوطه عن طريق دراسة ما يسمى بميل الخط المستقيم .

فإذا اخترنا نقطتين أ ($س_1$ ، $ص_1$) ، ب ($س_2$ ، $ص_2$) على المستقيم ل (بحيث لا يكون ل رأسياً) .

ويفرض أن $س_2 > س_1$ فأن

الفرق بين الإحداثيين السينيين $\Delta س = س_2 - س_1$
الفرق بين الإحداثيين الصاديين $\Delta ص = ص_2 - ص_1$

(فإذا كانت Δ ص سالبة بالطبع يكون المستقيم هابطاً سنعطي مثالا توضيحياً فيما بعد) .

وتقيس النسبة $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ المعدل الذي يتغير به الإحداثي الصادي بالنسبة لتغير الإحداثي السيني وهذه النسبة تمكننا من الحكم على المستقيم صاعداً كان أم هابطاً .

فإذا اخذنا في اعتبارنا مستقيماً يمر بالنقطتين أ (٤ ، ٥) ، ب (٣ ، ٣) فإن :

Δ ص = ٥ − ٣ = ٢

، Δ س = ٤ − ٣ = ١

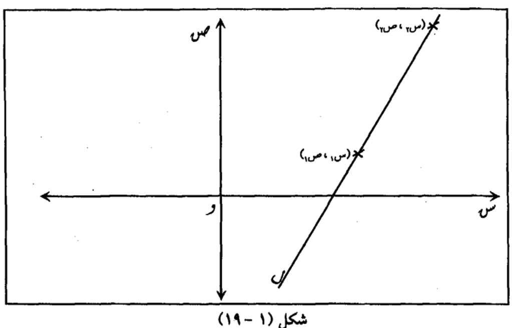
أي أنه عندما تتحرك النقطة على ل من ب إلى أ فإنها ترتفع رأسياً بمقدار وحدتين لكل وحدة من وحدات التغير في المسافة الأفقية ويكون :

$\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ = ٢ مقياساً لانحدار الخط المستقيم ل

وسنسمي هذا المعدل ($\frac{\Delta ص}{\Delta س}$) بميل الخط المستقيم .

وبالطبع يتضح لنا أننا سنحصل على نفس النتيجة إذا قيست النسبة بين المتغيرين الرأسي والأفقي عندما تتحرك النقطة من أي نقطة على المستقيم إلى النقطة الأخرى .

وهذا يعني أن هذا المقياس ثابت للخط المستقيم الواحد ولا يتغير بتغير النقطتين المختارتين .



شكل (١ - ١٩)

تعريف :

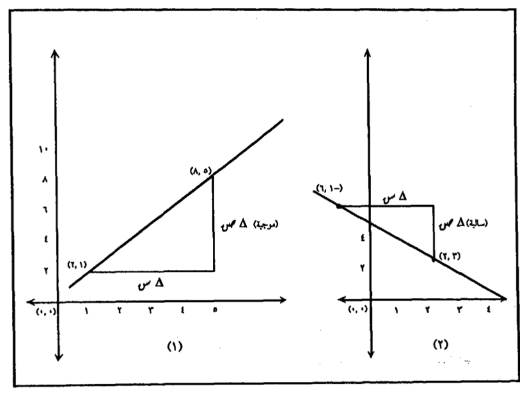
إذا كان ل مستقيماً لا يوازي محور الصادات* وكانت $(س_1 ، ص_1)$ ، $(س_2 ، ص_2)$ أي نقطتين على الخط المستقيم ل

* (جميع المستقيمات الموازية لمحور الصادرات ليس لها ميل حيث Δ س= ٠)

$$\text{فإن ميل المستقيم ل} = \frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1}$$

ولزيادة في الإيضاح نورد المثال التالي :

إوجد ميل كلا من المستقيمين في الشكلين الآتيين :



شكل (١ - ٢٠)

في الشكل الأول المستقيم يمر بالنقطتين (١ ، ٢) ، (٥ ، ٨)

$$\therefore \text{م}_1 = \frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1} = \frac{٨ - ٢}{٥ - ١}$$

$$= \frac{٦}{٤} \qquad = \frac{٣}{٢}$$

في الشكل الثاني المستقيم يمر بالنقطتين (-١ ، ٦) ، (٣ ، ٢)

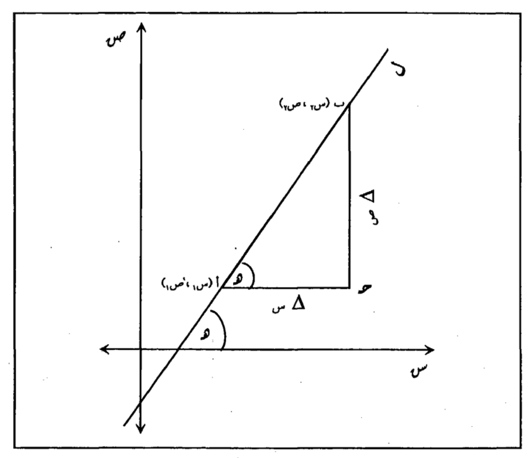
$$\therefore م_٢ = \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٢ - ٦}{٣ - (-١)}$$

$$= \frac{-٤}{٤} = -١$$

نستنتج أنه إذا كان الميل موجب فإن المستقيم يكون صاعداً (١ ـ ٢٠(١))

أنه إذا كان الميل سالب فإن المستقيم يكون هابطاً (١ ـ ٢٠(٢))

(١ ـ ٦) العلاقة بين ميل الخط المستقيم وزاوية ميله :



شكل (١ - ٢١)

بالنظر إلى الرسم الموضح في شكل (١ ـ ٢١)

نلاحظ أنه في المثلث ب أ حـ

$\hat{ب أ حـ}$ = هـ زاوية ميل المستقيم ل

∴ طا $\hat{هـ}$ = طا ب $\hat{أ}$ حـ = $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ = م

ومن ذلك نستنتج أنه :

إذا كان ميل المستقيم م وزاوية ميله هـ

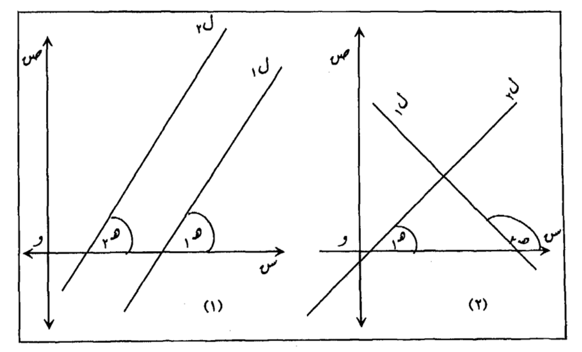
فإن م = طا هـ

(١ ـ ٧) العلاقة بين ميلي المستقيمين المتوازين وميلي المستقيمين المتعامدين :

نظرية :

(١) إذا كان $ل_١$ ، $ل_٢$ ، مستقيمين متوازيين فإن ميلاهما متساويان .

(٢) إذا كان $ل_١$ ، $ل_٢$ مستقيمين متعامدين فإن حاصل ضرب ميليهما = − ١



شكل (١ - ٢٢)

البرهان :

(١) ل$_1$ // ل$_2$ شكل (١ ـ ٢٢ (١))

ليكن هـ$_1$ ، هـ$_2$ هما قياسي زاويتي ميل ل$_1$، ل$_2$ على الترتيب من توازي المستقيمين

هـ$_1$ = هـ$_2$ من توازي المستقيمين

طا هـ$_1$ = طا هـ$_2$

م$_1$ = م$_2$

أما إذا اعتبرنا أن م$_1$ = م$_2$ فإن

طا هـ$_1$ = طا هـ$_2$

هـ$_1$ = هـ$_1$ ∴ ل$_1$ // ل$_2$

وتكون العبارة التالية صحيحة :

«يكون المستقيمان ل$_1$ ، ل$_2$ متوازيين إذا وإذا فقط كان ميلاهما متساويين»

(٢) انظر الرسم شكل (١ ـ ٢٢(٢))

في حالة تعامد المستقيمان ل$_1$ ، ل$_2$ فإن :

هـ$_1$ = ٩٠ + هـ$_2$

طا هـ$_1$ = طا (٩٠ + هـ$_2$)

طا هـ$_1$ = - طتا هـ$_2$

طا هـ$_1$ = - $\frac{١}{\text{طا هـ}_2}$

م$_1$ = - $\frac{١}{\text{م}_2}$

م$_1$ م$_2$ = - ١

وأيضاً إذا كان $م_1 م_2 = -1$

$$م_1 = \frac{-1}{م_2}$$

$$طا هـ_1 = \frac{1}{طا هـ_2}$$

$طا هـ_1 = -$ طتا $هـ_2$

$طا هـ_1 =$ طا $(90 + هـ_2)$

$هـ_1 = 90 + هـ_2$

$ل_1$ عمودي على $ل_2$

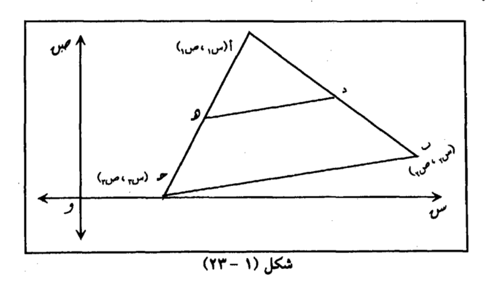
وتكون العبارة التالية صحيحة :

«يكون المستقيمان $ل_1$ ، $ل_2$ متعامدين إذا ـ وإذا فقط ـ كان حاصل ضرب ميليهما = −1» .

مثال (1 ـ 19) :

في أي مثلث أ ب حـ أثبت تحليلياً أن القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي الضلعين $\overline{أب}$ ، $\overline{أحـ}$ توازي الضلع الثالث وتساوي نصفه

الحل :



شكل (1 - 23)

نفرض أن المثلث أ ب حـ رؤوسه على الترتيب

أ(س$_{١}$ ، ص$_{١}$) ، ب(س$_{٢}$ ، ص$_{٢}$) ، حـ(س$_{٣}$ ، ص$_{٣}$)

، د منتصف أ ب ، هـ منتصف ب حـ

والمطلوب إثبات أن : د هـ // ب حـ

$$|\text{د هـ}| = \frac{١}{٢}\ |\text{ب حـ}|$$

$\therefore$ د منتصف $\overline{\text{أب}}$ $\therefore$ د $\equiv \left(\frac{\text{س}_{١}+\text{س}_{٢}}{٢} \text{ ، } \frac{\text{ص}_{١}+\text{ص}_{٢}}{٢}\right)$

$\therefore$ هـ منتصف $\overline{\text{أحـ}}$ $\therefore$ هـ $\equiv \left(\frac{\text{س}_{١}+\text{س}_{٣}}{٢} \text{ ، } \frac{\text{ص}_{١}+\text{ص}_{٣}}{٢}\right)$

ميل المستقيم $\overleftrightarrow{\text{د هـ}}$ $= \dfrac{\dfrac{\text{ص}_{١}+\text{ص}_{٣}}{٢} - \dfrac{\text{ص}_{١}+\text{ص}_{٢}}{٢}}{\dfrac{\text{س}_{١}+\text{س}_{٣}}{٢} - \dfrac{\text{س}_{١}+\text{س}_{٢}}{٢}}$

$= \dfrac{\text{ص}_{٣}-\text{ص}_{٢}}{\text{س}_{٣}-\text{س}_{٢}} =$ ميل المستقيم $\overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$

$\therefore$ د هـ // ب حـ وهو المطلوب (١)

وباستخدام قانون البعد :

$$|\text{د هـ}| = \sqrt{\left(\frac{\text{س}_{١}+\text{س}_{٣}}{٢} - \frac{\text{س}_{١}+\text{س}_{٢}}{٢}\right)^{٢} + \left(\frac{\text{ص}_{١}+\text{ص}_{٣}}{٢} - \frac{\text{ص}_{١}+\text{ص}_{٢}}{٢}\right)^{٢}}$$

$$= \sqrt{\frac{(\text{س}_{٣}-\text{س}_{٢})^{٢}}{٤} + \frac{(\text{ص}_{٣}-\text{ص}_{٢})^{٢}}{٤}}$$

$$= \sqrt{\frac{١}{٤}\left[(\text{س}_{٣}-\text{س}_{٢})^{٢} + (\text{ص}_{٣}-\text{ص}_{٢})^{٢}\right]}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{(س_3 - س_2)^2 + (ص_3 - ص_2)^2}$$

$$= \frac{1}{2} \quad |ب حـ| \text{ وهو المطلوب } (2)$$

مثال (١ ـ ٢٠) :

باستخـــدام الميـــل برهـــن عـــلى أن النقط الثلاث أ (٢ ، ٣) ، ب (−١ ، ٠) ، حـ (٤ ، ٥) تقع على مستقيم واحد .

الحـــل :

$$\text{ميل } \overleftrightarrow{أب} = \frac{٠-٣}{-١-٢} = \frac{-٣}{-٣} = ١$$

$$\text{ميل } \overleftrightarrow{ب حـ} = \frac{٥-٠}{٤+١} = \frac{٥}{٥} = ١$$

$$\therefore \text{ ميل } \overleftrightarrow{أب} = \text{ميل } \overleftrightarrow{ب حـ}$$

$$\Leftarrow \overleftrightarrow{أب} \parallel \overleftrightarrow{ب حـ}$$

$$\text{ولكن } \overleftrightarrow{أب} \cap \overleftrightarrow{ب حـ} = \{ب\}$$

اذن $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{ب حـ}$ هما مستقيم واحد .

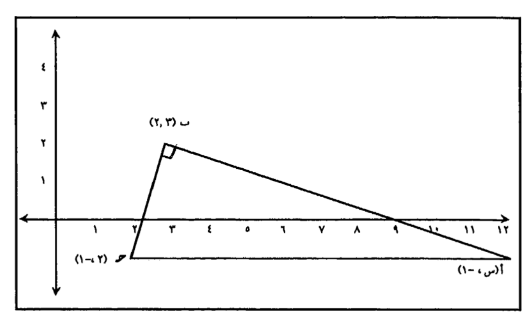
أي أن أ ، ب ، حـ على إستقامة واحدة .

***

مثال (١ـ٢١) :

أب حـ مثلث رؤوسه (س ، −١) ، (٣ ، ٢) ، (٢ ، −١) على الترتيب .

أوجد قيمة س التي تجعل المثلث أب حـ قائم الزاوية في ب .



شكل (١ - ٢٤)

الحـــل :

$$\text{ميل } \overleftrightarrow{\text{أب}} = \frac{٢ + ١}{٣ - \text{س}} = \frac{٣}{٣ - \text{س}}$$

$$\text{ميل } \overleftrightarrow{\text{ب حـ}} = \frac{٢ + ١}{٣ - ٢} = ٣$$

بما أن المثلث قائم الزاوية في ب

$$\overleftrightarrow{\text{أب}} \perp \overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$$

اذن ميل أب × ميل ب حـ = −١

$$\frac{٣}{٣ - \text{س}} \times ٣ = -١$$

$$\frac{٩}{٣-س} = -١$$

$$٩ = س - ٣$$

$$س = ١٢$$

بالنظر إلى تمثيل المثلث في الشكل رقم (١ـ ٢٤)

نتحقق من صحة إجابتنا .

***

تمارين (١ـ٣)

(١) أي من ثلاثيات النقط الآتية تكون رؤوس مثلث قائم الزاوية

(أ) (٧, ٠) ، (٥، ٣) ، (٠، ٠)

(ب) (٧, ٥) ، (١، -٣) ، (-١، ١)

(حـ) (-٤، -٢) ، (٦, ١) ، (٠، -٥)

(٢) أ ، ب ، حـ هي النقط (ك ، -١) ، (٢ ، ٥) ، (-٤ ، -٢) على الترتيب فإذا كان المثلث أ ب حـ قائم الزاوية في ب أوجد قيمة ك .

(٣) اثبت باستخدام الميل أن النقط الثلاث

(-ك ، ك+٣) ، (٣ن ، ٢-٣ن) ، (هـ ، ٢-هـ)

تقع جميعا على مستقيم واحد لجميع قيم ك ، ن ، هـ الحقيقية .

***

(١ـ٨) الصور المختلفة لمعادلة الخط المستقيم :

سنستمر في دراسة المستقيمات ومحاولة الحصول على صور قياسية لمعادلات الخط المستقيم باستخدام معلومات كالميل أو نقط على المستقيم وعلى أنه يجب علينا أن نتذكر التعريف الذي وضعناه لمعادلة المنحنى سابقا . الذي ينص على أن المعادلة (س ، ص) تمثل منحن ما إذا كانت تتحقق بإحداثي أي نقطة تقع على هذا المنحنى .

وبناء على ذلك فإننا نستطيع وبسهولة الحصول على معادلة المستقيم في بعض حالاته الخاصة نوردها فيما يلي :

١ ـ المستقيم ل يوازي محور الصادات ويمر بالنقطة (أ ، ب) . ففي هذه الحال فإن الأحداثي السيني لأي نقطة تقع على الخط المستقيم هو مقدار ثابت =أ وعلى ذلك فإننا نقبل الصورة س=أ كمعادلة لهذا المستقيم لانها تتحقق بإحداثي أي نقطة تقع على المستقيم .

٢ ـ المستقيم ل يوازي محور السينات ويمر بالنقطة (أ ، ب) بنفس الطريقة فإننا نقبل الصورة ص= ب معادلة للمستقيم ل حيث تتحقق لجميع نقط المستقيم .

٣ ـ بالنظر إلى محور الإحداثيات : نجد أن أي نقطة على محور السينات يكون الإحداثي الصادي لها = صفراً .

وعلى ذلك فإن معادله محور السينات هي ص= ٠

وأيضاً نجد أن الإحداثي السيني لأي نقطة على محور الصادات يساوي صفراً .

وعلى ذلك فإن معادلة محور الصادات هي س= ٠

وكتطبيق على ما سبق فإن معادلة المستقيم الذي يوازي محور الصادات ويمر بالنقط (١ ،-٢) هي س=١

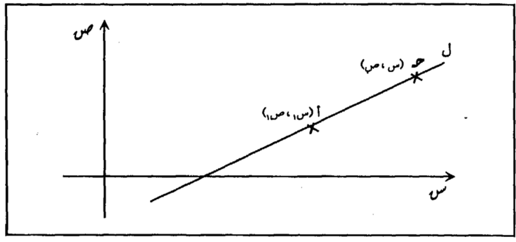
ومعادلة المستقيم الذي يوازي محور السينات ويمر بالنقطة (١ ،-٢) هي :

ص=-٢

والآن نعود لتعيين معادلة الخط المستقيم والذي لا يكون في حالة خاصة كموازاة أحد المحاور أو يقع على المحاور نفسها .

والحالة الأولى التي سنعرض لها هي :

معادلة الخط المستقيم بمعلومية الميل ونقطة عليه :



شكل (١ - ٢٥)

فإذا كان ميل الخط المستقيم ل =م

والنقطة المعلومة هي أ≡(س$_1$ ، ص$_1$)

فإذا فرضنا أي نقطة من نقاط المستقيم ولتكن حـ≡(س ، ص)

فباستخدام إحداثيات النقطتين أ ، حـ

$$\text{فإن م} = \frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ص}-\text{ص}_1}{\text{س}-\text{س}_1}$$

والصورة السابقة هي علاقة بين س ، ص (إحداثيات أي نقطة تقع على الخط المستقيم ل) بدلالة م ، س$_1$ ، ص$_1$ لكنها رغم ذلك لا تصلح لكونها صورة معادلة

مستقيم لأننا لو عوضنا بالنقطة ($س_١$ ، $ص_١$) في هذه الصورة فإن الطرف الأيسر ينعدم فيه كلا من البسط والمقام مما يجعله ليس ذو معنى .

ولكننا نستطيع تحويل الصورة $م = \frac{ص - ص_١}{س - س_١}$

فإذا عوضنا عن $س = س_١$ ، $ص = ص_١$ فإن المعادلة تتحقق وعلى ذلك فإن صورة معادلة المستقيم ل بمعلومية الميل م والنقطة ($س_١ - ص_١$) هي :

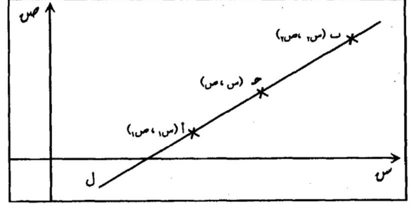
$$ص - ص_١ = م (س - س_١)$$

ويمكن وصف المستقيم ل عن طريقها كما يلي :

$$ل = \{(س ، ص) : ص - ص_١ = م (س - س_١)\}$$

الحالة الثانية :

«معادلة المستقيم بمعلومية نقطتين عليه»



شكل (١ - ٢٦)

نفرض أن المستقيم ل يمر بالنقطتين أ ($س_١$ ، $ص_١$) ، ب ($س_٢$ ، $ص_٢$)

ونفرض النقطة حـ (س ، ص) أي نقطة على ل

فإن خاصية الاستقامة تعني تحليلياً أننا لو حسبنا الميل من أي نقطتين على المستقيم فإننا نحصل على نفس النتيجة مهما كانت النقطتان المختارتان

(وهوما سبق وعبرنا عنه بأن ميل المستقيم دائما مقدار ثابت)

وعلى ذلك فباستخدام إحداثيات أ ، حـ

$$م = \frac{ص - ص_1}{س - س_1} \qquad (1)$$

باستخدام إحداثيات أ ، ب

$$م = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1} \qquad (2)$$

من (١) ، (٢)

$$\frac{ص - ص_1}{س - س_1} = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$$

$$(ص - ص_1)(س_2 - س_1) = (ص_2 - ص_1)(س - س_1)$$

وهي علاقة بين س ، ص إحداثياً أي نقطة على المستقيم بدلالة إحداثيات نقطتين عليه .

ويمكن وصف المستقيم ل عن طريق هذه المعادلة كما يلي :

$$ل = \{(س ، ص) : (ص - ص_1)(س_2 - س_1) = (ص_2 - ص)(س - س_1)\}$$

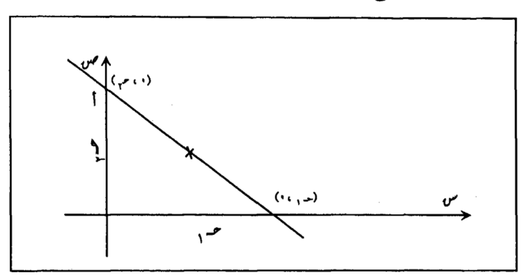
الحالة الثالثة :

معادل الخط المستقيم بمعلومية الميل والجزء المقطوع من محور الصادات

قبل أن نبدأ في إستنتاج هذه الصورة يجب أن نوضح ما هو المقصود بالجزء المقطوع من أحد المحورين بالمستقيم ل .

تعريف :

إذا قطع المستقيم ل محور السينات في النقطة ($ح_1$ ، ٠) فإن $ح_1$ هي طول الجزء المقطوع من محور السينات بالمستقيم ل وأيضاً إذا قطع المستقيم ل محور الصادات في النقطة (٠ ، $ح_2$) . فإن $ح_2$ هي طول الجزء المقطوع من محور الصادات بالمستقيم ل وشكل (١-٢٧) يوضح $ح_1$ ، $ح_2$



شكل (١ - ٢٧)

والآن نعود لتعيين معادلة المستقيم ل والذي يقطع من محور الصادات جزءاً قدره حـ مع العلم بأن ميل المستقيم ل معلوماً ويساوي م .

بما أن المستقيم يقطع من محور الصادات جزءاً قدره حـ

اذن النقطة (٠ ، حـ) تقع على المستقيم وميله = م

معادلة ل هي ص − حـ = م (س − ٠) (من الحالة الأولى)

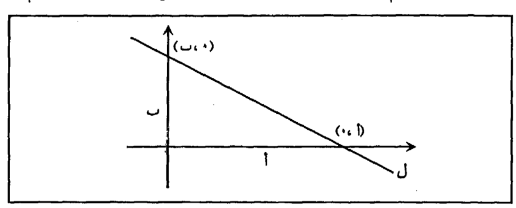
ص = م س + حـ

ووصف المستقيم ل عن طريق هذه المعادلة

هو ل = {(س ، ص) : ص = م س + حـ}

الحالة الرابعة :

معادلة المستقيم بمعلومية الجزئين المقطوعين من محوري الأحداثيات بالمستقيم



شكل (١ - ٢٨)

نفرض أن المستقيم ل يقطع من المحورين جزئين طوليهما أ ، ب على الترتيب

من تعريف الجزء المقطوع نجد أن المستقيم يمر بالنقطتين (أ ، ٠) ، (٠ ، ب)

وبتطبيق صورة معادلة المستقيم بمعلومية نقطتين عليه

$$\frac{ص - ٠}{س - أ} = \frac{ب - ٠}{٠ - أ}$$

$$\frac{ص}{ب} = \frac{س - أ}{-أ} = -\frac{س}{أ} + \frac{أ}{أ}$$

$$\frac{س}{أ} + \frac{ص}{ب} = ١$$

وهذه صورة المعادلة المطلوبة

أما وصف ل بهذه الصورة فهو :

$$ل = \{(س ، ص) : \frac{س}{أ} + \frac{ص}{ب} = ١\}$$

(تسمى هذه الصورة بصورة المقطعين أيضاً)

نظرية (١ ـ ٢) :

المعادلة العامة من الدرجة الأولى في س ، ص

على الصورة أ س + ب ص + حـ = ٠ تمثل دائما خطاً مستقيما (أ ،ب ≠ ٠ معاً)

البرهان :

إذا كانت ب = ٠ تصبح المعادلة

أ س + حـ = ٠

$س = \frac{-حـ}{أ}$ وهي معادلة مستقيم // محور الصادات

وأذا كانت أ = ٠ تصبح المعادلة

ب ص + حـ = ٠

$ص = \frac{-حـ}{ب}$ وهي معادلة مستقيم // محور السينات

أما إذا كانت أ ≠ ٠ ، ب ≠ ٠ أيضاً

فإن أ س + ب ص + حـ = ٠

ب ص = -أ س - حـ

$$ص = \frac{-أ}{ب} س + \frac{-حـ}{ب}$$

وهي صورة المعادلة تمثل مستقيماً ميله = $-\frac{أ}{ب}$

والجزء المقطوع من محور الصادات = $-\frac{حـ}{أ}$

فإن المعادلة أ س + ب ص + حـ = ٠

تمثل دائما خطاً مستقيما حيث أ ، ب ≠ ٠ معاً .

وهو المطلوب

نتيجة : يمكن استخدام هذه النظرية لتعيين ميل المستقيم والجزء المقطوع من محور الصادات إذا علمت المعادلة

فإذا كانت المعادلة في الصورة العامة أ س + ب ص + حـ = ٠

فإنه يمكن تحويلها إلى صورة الميل والجزء المقطوع فتصبح

$$ص = \frac{-أ}{ب} س - \frac{حـ}{ب}$$

فيكون الميل م $= \frac{-أ}{ب} = \frac{-معامل\ س}{معامل\ ص}$

ويكون الجزء المقطوع $= \frac{-حـ}{ب} = \frac{-\ الحد\ المطلق}{معامل\ ص}$

فمثلاً إذا كانت معادلة المستقيم في الصورة

٣ س − ٤ ص + ٥ = ٠

فإن م $= \frac{-أ}{ب} = \frac{-٣}{-٤} = \frac{٣}{٤}$

، الجزء المقطوع $= \frac{-حـ}{ب} = \frac{-٥}{-٤} = \frac{٥}{٤}$

(١ – ٩) إحداثيات نقطة تقاطع مستقيمين :

ليكن $ل_١$ = {(س ، ص) : $أ_١$ س + $ب_١$ ص + $حـ_١$ = ٠}

، $ل_٢$ = {(س ، ص) : $أ_٢$ س + $ب_٢$ ص + $حـ_٢$ = ٠}

يتقاطعان في النقطة هـ ($س_١$ ، $ص_١$)

هـ ∋ $ل_١$ ∴ $أ_١$ $س_١$ + $ب_١$ $ص_١$ + $حـ_١$ = ٠ (١)

، هـ ∋ $ل_٢$ ∴ $أ_٢$ $س_١$ + $ب_٢$ $ص_١$ + $حـ_٢$ = ٠ (٢)

، (١) ، (٢) معادلتان آنيتان من الدرجة الأولى في $س_١$ ، $ص_١$ بحلهما جبرياً نحصل على كلا من $س_١$ ، $ص_١$ ، وتكون إحداثيات نقطة التقاطع هـ ≡ ($س_١$ ، $ص_١$)

(١ – ١٠) عائلة الخطوط المستقيمة :

١ ـ المعادلة ص = $م_١$ س + $حـ_١$

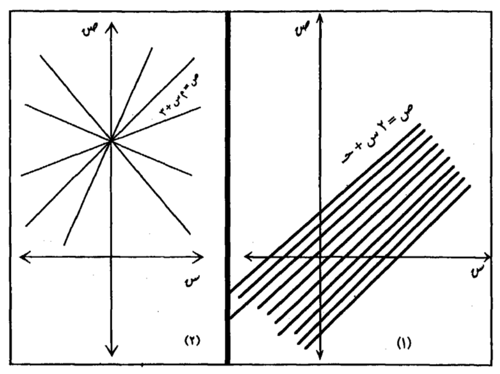
تدل على معادلة مستقيم ميله = $م_١$ وطول الجزء المقطوع من محور الصادات = $حـ_١$

والمعادلة ص = ٢س + حـ

هي معادلة مستقيم ميله = ٢ ويقطع من محور الصادات جزءاً قدره حـ فإذا سمحنا للرمز حـ أن يأخذ قيمة عددية موجبة أو سالبة أو صفراً فإننا نحصل على عائلة (مجموعة) من المستقيمات لها نفس الميل م أنظر شكل (١ ـ ٢٩ (١))

بينما المعادلة ص = م س + ٣ هي معادلة مستقيم يقطع من محور الصادات جزءاً طوله ٣ فإذا سمحنا للرمز م بأن يأخذ أي قيمة موجبة أو سالبة أو صفراً فإننا نحصل على عائلة من المستقيمات تقطع من محور الصادات الجزء ٣

أنظر شكل (١ – ٢٩(٢))



شكل (١ - ٢٩)

٢ ـ بوجه عام فإن المعادلة $أ_١ س + ب_١ ص + حـ_١ = ٠$

حيث $أ_١$ ، $ب_١$ ، $حـ_١$ أعداداً ثابتة

هي معادلة مستقيم ميله $- \frac{أ_١}{ب_١}$ ويقطع من محور الصادات جزءاً $= \frac{حـ_١}{ب_١}$

ومعادله عائلة (جميع) المستقيمات التي تتفق معه في الميل هي :

$$أ_١ س + ب_١ ص + حـ = ٠$$

حيث حـ متغير يأخذ أي قيمة موجبة أو سالبة أو صفراً

فمثلا : ٣ س + ٢ص + ٤ = ٠

هي معادلة مستقيم ميله $= - \frac{٣}{٢}$

ومعادلة عائلة المستقيمات التي لها نفس الميل هي :

$$٣ س - ٢ ص + حـ = ٠$$ حـ متغير يأخذ أي قيمة .

٣ـ المعادلة $ص - ص_١ = م_١ (س - س_١)$:

هي معادلة مستقيم ميله معلوم $= م_١$ ويمر بنقطة معينة $(س_١ ، ص_١)$.

وتكون المعادلة $ص - ص_١ = م (س - س_١)$

حيث م متغير يأخذ أي قيمة موجبة أو سالبة أو صفراً هي معادلة عائلة المستقيمات التي تمر بالنقطة $(س_١ ، ص_١)$.

فمثلاً عائلة جميع المستقيمات التي تمر بالنقطة (٢ ، ٣)

معادلتها هي $(ص - ٣) = م (س - ٢)$

نظرية (١ ـ ٣) :

وبوجه عام معادلة عائلة المستقيمات التي تمر بنقطة تقاطع المستقيمين .

$$ل_١ = \{(س ، ص) : أ_١ س + ب_١ ص + حـ_١ = ٠\}$$

$$ل_٢ = \{(س ، ص) : أ_٢ س + ب_٢ ص + حـ_٢ = ٠\}$$

هي $(أ_١ س + ب_١ ص + حـ_١) + ك (أ_٢ س + ب_٢ ص + حـ_٢) = ٠$

البرهان :

لتكن $(س_١ ، ص_١)$ هي نقطة تقاطع المستقيمين $ل_١ ، ل_٢$

$$أ_١ س_١ + ب_١ ص_١ + حـ_١ = ٠$$

$$، \quad أ_٢ س_١ + ب_٢ ص_١ + حـ_٢ = ٠$$

وبالتالي فإن :

$(أ_١ س_١ + ب_١ ص_١ + حـ_١) + ك\ (أ_٢ س_١ + ب_٢ ص_١ + حـ_٢) =$ صفر

أي أن $(س_١ ، ص_١) \in$ ل حيث

$ل = \{(س ، ص) : (أ_١ س + ب_١ ص + حـ_١) + ك\ (أ_٢ س + ب_٢ ص + حـ_٢) = ٠\}$

فمثلاً عائلة المستقيمات التي تمر بنقطة تقاطع المستقيمين

$ل_١ = \{(س ، ص) : ٢س + ص - ٥ = ٠\}$

$، \ ل_٢ = \{(س ، ص) : ٣س - ٢ ص - ٤ = ٠\}$

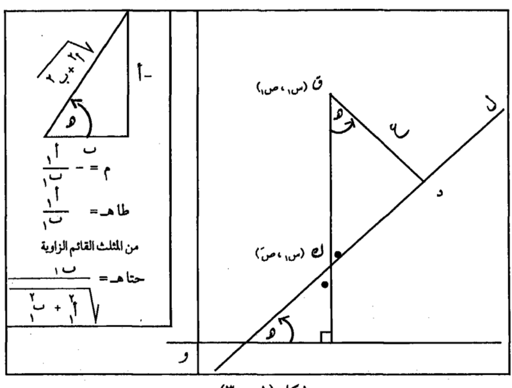
هي $ل = \{(س ، ص) : (٢س + ص - ٥) + ك\ (٣س - ٢ ص - ٤) = ٠\}$

ويمكن بتحديد أي شرط آخر لتبين قيمة ك وبالتالي تعيين معادلة ل

نظرية (١ ـ ٤) :

ايجاد طول العمود الساقط من النقطة $(س_١ ، ص_١)$ على المستقيم

$ل = \{(س ، ص) : أ_١ س + ب_١ ص + حـ_١ = ٠\}$



شكل (١ - ٣٠)

المطلوب :

إيجاد طول العمود |ق د|

البرهان :

من النقطة ق نسقط عمود على محور السينات فيقطع المستقيم المعلوم في ك

اذن ك ≡ (س$_1$ ، ص)

ك تقع على المستقيم ل اذن تحقق معادلته

$$أ_1 س + ب_1 ص' + حـ_1 = ٠$$

$$ص' = - \frac{أ_1 س_1 + حـ_1}{ب_1}$$

ولكن |ق ك| = |ص$_1$ − ص'|

$$= \left| ص_1 + \frac{أ_1 س + حـ_1}{ب_1} \right|$$

$$= \left| \frac{أ_1 س_1 + ب_1 ص_1 + حـ_1}{ب_1} \right|$$

من المثلث ق د ك نجد ان $\frac{ع}{|ق ك|}$ = حتا هـ

اذن ع = |ق ك| حتا هـ

$$= \left| \frac{أ_1 س_1 + ب_1 ص_1 + حـ_1}{ب_1} \times \frac{\pm ب_1}{\sqrt{أ_1^2 + ب_1^2}} \right|$$

$$اذن ع = \frac{|أ_1 س_1 + ب_1 ص_1 + حـ_1|}{\sqrt{أ_1^2 + ب_1^2}}$$

وهو المطلوب

(١ ـ ١١) المعادلة المتجانسة من الدرجة الثانية والخط المستقيم :

الصورة العامة للمعادلة المتجانسة من الدرجة الثانية هي

أ س^{٢} + ٢ حـ س ص + ب ص^{٢} = ٠

(أ س + حـ ص)^{٢} - (حـ^{٢} - أ ب) ص^{٢} = ٠

ومنها فإن المعادلة تمثل مستقيمين :

ل$_{١}$ = { (س ، ص) : أ س + (حـ + $\sqrt{\text{حـ}^{٢} - \text{أ ب}}$) ص = ٠ }

، ل$_{٢}$ = { (س ، ص) : أ س + (حـ - $\sqrt{\text{حـ}^{٢} - \text{أ ب}}$) ص = ٠ }

ويكون المستقيمان ل$_{١}$ ، ل$_{٢}$ حقيقيين إذا - وفقط إذا - كان حـ^{٢} > أ ب

ويكون المستقيمان ل$_{١}$ ، ل$_{٢}$ منطبقين إذا - وفقط إذا - كان حـ^{٢} = أ ب

ولن نتعرض هنا للحالة التي فيها حـ^{٢} < أ ب

وإذا كان أ = ٠ مثلاً فإن المعادلة تصبح

٢ حـ س ص + ب ص^{٢} = ٠ تمثل مستقيمين

معادلة الأول ص = ٠

، معادلة الثاني ٢ حـ س + ب ص = ٠

نتيجة (١) : الشرط اللازم لتمثل المعادلة :

أ س^{٢} + ٢ هـ س ص + ب ص^{٢} + ٢ ق س + ٢ ف ص + حـ = ٠

خطين مستقيمين

البرهان : من المعادلة فإن :

ب ص^{٢} + ٢ (هـ س + ف) ص + (أ س^{٢} + ٢ ق س + حـ) = ٠ (١)

وهذه معادلة من الدرجة الثانية في ص يمكن استخدام قانون حل معادلات الدرجة الثانية في إيجاد مجموعة الحل لها .

أي ص = $\dfrac{-(٢\text{ هـ س} + \text{ف}) \pm \sqrt{٤ (\text{هـ س} + \text{ف})^٢ - ٤ \text{ ك} (\text{أس}^٢ + \text{ق س} + \text{حـ})}}{٢ \text{ ب}}$

$\text{هـ س} + \text{ب ص} + \text{ف} = \pm\sqrt{(\text{هـ}^٢ - \text{أب})\text{ س}^٢ + ٢ (\text{هـ ف} - \text{ب ق}) + (\text{ف}^٢ - \text{ب حـ})}$

فلكي تمثل المعادلة خطين مستقيمين فلا بد أن يكون المقدار الموجود تحت الجذر مربعا كاملا والشرط اللازم لذلك أن يكون مميزه = ٠

(ملاحظة : المقدار الموجود تحت الجذر هو مقدار ثلاثي من الدرجة الثانية في س) بوضع مميز المقدار تحت الجذر = ٠

اذن $(\text{هـ}^٢ - \text{أب}) (\text{ف}^٢ - \text{ب حـ}) - (\text{هـ ف} - \text{ب ق})^٢ = ٠$

$\text{هـ}^٢ \text{ف}^٢ - \text{هـ}^٢ \text{ب حـ} - \text{أب ف}^٢ + \text{أب}^٢ \text{حـ} - \text{هـ}^٢ \text{ف}^٢ + ٢ \text{ هـ ف ب ق}$

$- \text{ب}^٢ \text{ق}^٢ = ٠$ بالقسمة على ب حيث ب $\neq$ ٠ نحصل على .

$\text{أب حـ} - \text{أف}^٢ - \text{ب ق}^٢ - \text{حـ هـ}^٢ - ٢ \text{ ف ق هـ} = ٠$

$\text{أ}(\text{ب حـ} - \text{ف}^٢) - \text{هـ} (\text{هـ حـ} - \text{ف ق}) + \text{ق} (\text{هـ ف} - \text{ب ق}) = ٠$

ويمكن كتاب هذا الشرط على هيئة محدد في الصورة

$\Delta = \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{هـ} & \text{ق} \\ \text{هـ} & \text{ب} & \text{ف} \\ \text{ق} & \text{ف} & \text{حـ} \end{vmatrix} = ٠$ وعناصر هذا المحدد تمثل مصفوفة متماثلة .

وإذا اعتبرنا أ = ٠ ، ب = ٠ تصبح المعادلة (١) هي :

$٢ \text{ هـ س ص} + ٢ \text{ ق س} + \text{ف ص} + \text{حـ} = ٠$

بالقسمة على ٢ هـ

$$\text{س ص} + \frac{\text{ق}}{\text{هـ}}\,\text{س} + \frac{\text{ق}}{\text{هـ}}\,\text{ص} + \frac{\text{حـ}}{\text{٢هـ}} =$$

$$\left(\text{س} + \frac{\text{ف}}{\text{هـ}}\right)\left(\text{ص} + \frac{\text{ق}}{\text{هـ}}\right) + \frac{\text{حـ}}{\text{٢ هـ}} - \frac{\text{ف ق}}{\text{هـ}^{٢}} = ٠$$

وهذه معادلة تمثل خطين مستقيمين إذا كان

$$\frac{\text{حـ}}{\text{٢ هـ}} - \frac{\text{ف ق}}{\text{هـ}^{٢}} = ٠$$

$\Leftarrow$ حـ هـ − ٢ ف ق = ٠

وهذا هو الشرط اللازم لكي تمثل المعادلة خطين مستقيمين وفي هذه الحال فإن المعادلة تمثل خطين مستقيمين يوازيان الخطين أ س^{٢} + ٢هـ س ص + ب ص^{٢} = ٠ والذين يمران بنقط الأصل .

مثال (١ ـ ٢٢) :

أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (−١ ، ٢) وميله ٣

الحـــل :

ص − ص = م (س − س$_{١}$)

ص − ٢ = ٣ (س + ١)

ص − ٣ س − ٥ = ٠ وهي المعادلة المطلوبة .

مثال (١ ـ ٢٣) :

أوجد الميل والجزء المقطوع من محور الصادات للمستقيم

ل = {(س ، ص) : ٢ س + ٣ ص − ٤ = ٠}

الحــل :

من معادلة المستقيم

$$٣\ ص = -٢\ س - ٤$$

$$ص = \frac{-٢}{٣}\ س - \frac{٤}{٣}$$

$$م = \frac{-٢}{٣}\ ،\ حـ = \frac{-٤}{٣}$$

مثال (١ ـ ٢٤) :

أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (١ ، -٢) وعمودي على المستقيم {(س ، ص) : ٣ س - ٢ ص + ٥ = ٠}

الحــل :

$$\text{ميل المستقيم المعلوم} = \frac{-٣}{-٢} = \frac{٣}{٢}$$

نفرض أن ميل المستقيم المطلوب = م

بما أن المستقيمان متعامدان

$$\text{اذن}\ م_١ \times م_٢ = -١$$

$$م \times \frac{٣}{٢} = -١$$

$$م = \frac{-٢}{-٣}$$

اذن معادلة المستقيم المطلوب هي

$$ص + ٢ = \frac{-٢}{٣}\ (س - ١)$$

$$٣ص + ٦ = -٢س + ٢$$

$٣ص + ٢س + ٤ = ٠$

وهي المعادلة المطلوبة

مثال (١-٢٥) :

اوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (-٢ ، ١) ويوازي المستقيم الذي معادلته
$٢س + ٣ص + ٤ = ٠$

الحـــل :

ليكن $ل_{١} = \{ (س ،ص) : ٢س + ٣ص + ٤ = ٠ \}$

ميل المستقيم $ل_{١} = -\frac{٢}{٣}$

بما أن المستقيم المطلوب // $ل_{١}$

اذن ميل المستقيم المطلوب $= -\frac{٢}{٣}$

وبالتالي فأن معادلته هي $(ص - ١) = -\frac{٢}{٣}(س+٢)$

$٣ص - ٣ = -٢س - ٤$

$٢س + ٣ص + ١ = ٠$

وهي المعادلة المطلوبة

مثال (١-٢٦) :

أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين

$٢س + ٥ص = ١١$ ، $٣س - ص = -٩$

ويوازي المستقيم $٢س - ص = ٥$

الحـــــل :

نوجد أولاً نقطة تقاطع المستقيمين

٢ س + ٥ ص = ١١ ،   (١)

٣ س − ص   = −٩   (٢)

من المعادلة الأولى وضرب المعادلة الثانية في ٥

٢ س + ٥ ص = ١١
١٥ س − ٥ ص = −٤٥ } بالجمع

١٧ س   = −٣٤

س   = −٢

بالتعويض في (٢)

٣ × −٢ − ص = −٩

اذن −ص = −٣

ص = ٣

اذن نقطة التقاطع هي (−٢ ، ٣)

نوجد ثانيا ميل المستقيم

ميل الموازي = $\frac{-٢}{-١}$ = ٢

اذن ميل المستقيم = ٢ أيضاً

وبالتالي فإن معادلة المستقيم المطلوبة هي :

ص −٣ = ٢ (س +٢)

ص −٣ = ٢ س + ٤

ص −٢ س −٧ = ٠ وهي المعادلة المطلوبة

حـل آخـر :

يمكن حل هذا المثال باستخدام المعادلة العامة لعائلة المستقيمات كما يلي :

المعادلة العامة لعائلة المستقيمات التي تمر بنقطة تقاطع المستقيمين

$ل_١$ ={(س ، ص) : ٢ س + ٥ ص = ١ }

، $ل_٢$ ={(س ، ص) : ٣ س + ص =−٩}

هي ٢س + ٥ص − ١١ + ك (٣ س − ص + ٩) = ٠ (١)

بما ان المستقيم المطلوب يوازي المستقيم ٢ س − ص = ٥

اذن ميل المستقيم المطلوب م = $\frac{-٢}{-١}$ = ٢ (٢)

من (١) (٢ + ٣ ك) س + (٥ − ك) ص + (٩ ك − ١١) = ٠

∴ م = $\frac{-(٢+٣ك)}{٥-ك}$ (٣)

من (٢) ، (٣) نجد ان

$\frac{-(٢+٣ك)}{٥-ك}$ = ٢

−٢ − ٣ك = ١٠ − ٢ ك

− ك = ١٢

ك = −١٢

اذن معادلة المستقيم المطلوب هي :

٢ س + ٥ ص - ١١ - ١٢ (٣ س - ص + ٩) = ٠

٢ س + ٥ ص - ١١ - ٣٦ س + ١٢ ص - ١٠٨ = ٠

- ٣٤ س + ١٧ ص = ١١٩ = ٠

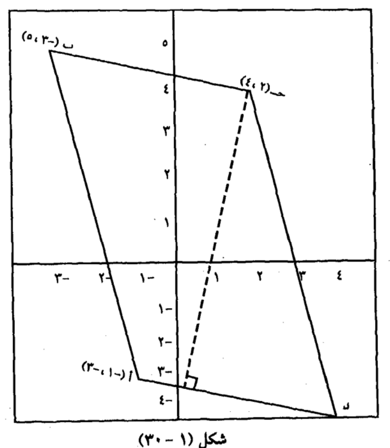
ص - ٢ س - ٧ = ٠

هي المعادل المطلوبة

مثال (١ ـ ٢٧) :

أ ب حـ د متوازي أضلاع إحداثيات رؤوسه الثلاثة أ ، ب ، حـ هي على الترتيب (-١ ، -٣) ، (-٣ ، ٥) ، (٢ ، ٤) .

أوجد إحداثيات الرأس الرابع ثم أوجد مساحته .



شكل (١ - ٣٠)

لتعيين إحداثيات د

$$س = -١ + ٢ - ٣ = ٤$$

$$ص = -٣ + ٤ - ٥ = -٤$$

اذن $د \equiv (٤ ، -٤)$

ولايجاد مساحة متوازي الأضلاع نوجد معادلة أ د

$$\frac{ص + ٣}{س + ١} = \frac{-٤ + ٣}{٤ + ١}$$

$$٥ ص + ١٥ = - س - ١$$

$$٥ ص + س + ١٦ = ٠$$

ويكـون ارتفاع متوازي الأضلاع «ع» هو طول العمود الساقط من النقطة حـ (٢ ، ٤) على المستقيم أ د .

طول القاعدة |أ د| $= \sqrt{(٤ + ١)^٢ + (-٤ + ٣)^٢}$

$$= \sqrt{٢٥ + ١} = \sqrt{٢٦}$$

ارتفاع متوازي الأضلاع $= \frac{|٥ \times ٤ + ٢ + ١٦|}{\sqrt{١ + ٢٥}}$

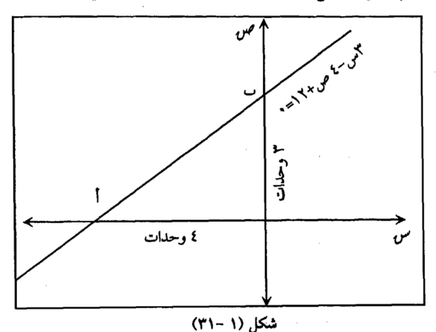
$$= \frac{٣٨}{\sqrt{٢٦}}$$

اذن مساحة متوازي الأضلاع $= \sqrt{٢٦} \times \frac{٣٨}{\sqrt{٢٦}}$

= ٣٨ وحدة مربعة

مثال (١ ـ ٢٨) :

المستقيم ل = {(س ، ص) : ٣ س − ٤ ص + ١٢ = ٠}
يقطع المحورين في النقطتين أ ، ب أوجد :
(١) إحداثيا كلا من أ ، ب   (٢) مساحة القطعة المثلثية أ و ب



شكل (١ −٣١)

بوضع معادلة المستقيم على صورة المقطعين كما يلي :

٣ س − ٤   = − ١٢

بالقسمة على −١٢

$$\frac{٣ س}{-١٢} - \frac{٤ س}{-١٢} = ١$$

$$\frac{س}{-٤} + \frac{ص}{٣} = ١$$

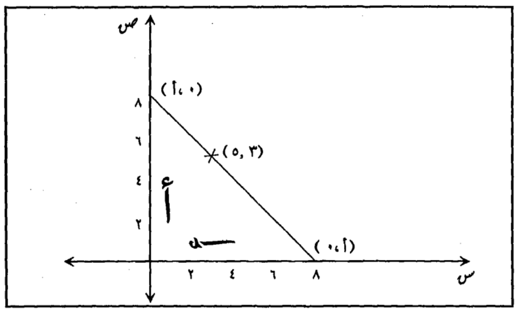
اذن المستقيم يقطع من الجزء السالب لمحور السينات طولا قــدره ٤ وحدات
ويقطع من الجزء الموجب لمحور الصادات طولا قدره ٣ وحدات
كما في الشكل (١− ٣١)

اذن أ ≡ (− ٤ ، ٠) ، ب ≡ (٠ ، ٣)

∴ مساحة المثلث أ و ب = $\frac{١}{٢}$ × ٣ × ٤ = ٦ وحدات مربعة .

مثال (١ ـ ٢٩) :

أوجد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة (٣ ، ٥) ويقطع من المحورين جزأين متساويين .



شكل (١ - ٣٢)

نفرض أن المستقيم ل يقطع من المحورين جزأين متساويين طول كلا منهما أ من الوحدات الطولية .

معادلة ل على صورة المقطعين هي :

$$\frac{س}{أ} + \frac{ص}{أ} = ١$$

$$س + ص = أ$$

بما ان النقطة (٣ ، ٥) تقع على ل اذن تحقق معادلته .

٣ + ٥ = أ

أ = ٨

اذن ل = { (س ، ص) : س + ص − ٨ = ٠ }

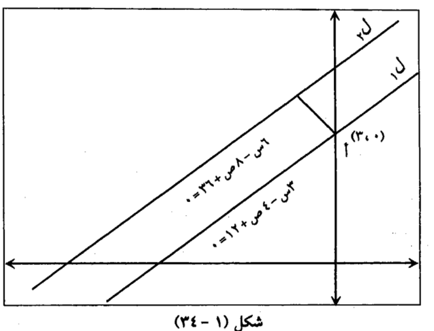
مثال (١ ـ ٣٠) :

أوجد البعد بين المستقيمين

ل$_1$ = { (س ، ص) : ٣ س − ٤ ص + ١٢ = ٠ }

ل$_2$ = { (س ، ص) : ٦ س − ٨ ص + ٣٦ = ٠ }

الحـــل :



شكل (١ - ٣٤)

بوضع س = ٠ (أي قيمة اختيارية مناسبة) في معادلة ل$_1$

اذن ٤ ص = ١٢ ⇐ ص = ٣

اذن (٠ ، ٣) ∈ ل$_1$

اذن النقطة أ ≡ (٠ ، ٣)

ثم نوجد طول العمود الساقط من أ على $ل_٢$ فيكون هو البعد المطلوب

البعد المطلوب $= \frac{|6 \times 0 - 3 \times 8 + 36|}{\sqrt{36 + 64}}$

$= \frac{12}{10}$

= ١,٢ وحدة طول

***

تمـــــارين (١-٤)

(١) أوجد معادلات المستقيمات التي تحقق الشروط التالية :

(أ) الميل = -١ ويمر بالنقطة (-٣ ، -٣)

(ب) الميل = ٢ والجزء المقطوع من محور الصادات = ٥

(حـ) يمر بالنقطتين (٠ ، ٥) ، (-٥ ، -٣)

(د) طولا الجزءين المقطوعين من محوري الإحداثيات هما على الترتيب ٢ ، ٤

(٢) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (-١ ، ٢) اذا كان

(أ) يوازي المستقيم ٣ س - ٢ ص + ٥ = ٠

(ب) عمودي على المستقيم ٢ ص - ٣ س + ٧ = ٠

(٣) أوجد معادلة المستقيم الذي يوازي المستقيم ٢ س - ص -٦ = ٠

ويمر بنقطة تقاطع المستقيمين س - ٣ - ١ = ٠ ، ٤ س - ص + ١٨ = ٠

(٤) أوجد قيمة ك التي تجعل المستقيم $ل_١$ = { (س ، ص) : ٢ س + ٣ص + ٢ = ٠ }

عمودياً على المستقيم $ل_٢$ = { (س ، ص) : ص = ك س + ٥ }

ثم أوجد نقطة تقاطع $ل_١$ ، $ل_٢$

(٥) أوجد المسافة بين المستقيمين المتوازيين

٢ ص + س + ٤ = ٠ ، ٢ ص + س + ١٢ = ٠

(٦) أوجد مساحة المثلث الذي رؤوسه هي النقط (٢ ، ٢) ، (٤ ، -٦) ، (٦ ، ٥)

(٧) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (١ ، ٣) ويقطع من المحورين جزءين النسبة بينهما ٣ :٢

(٨) ل هو المستقيم { (س ، ص) : ٣ س – ٤ ص + ٢٤ = ٠ } فإذا قطع المحورين في النقطتين أ ، ب وكانت حـ هي النقطة (-٢ ، ٥) فأوجد مساحة الشكل أ و حـ ب (و هي نقطة الأصل) .

(٩) المستقيم ٣ س + ص = ١٢ يقطع المحورين في النقطتين أ ، ب على الترتيب

، والمستقيم ٦ س + ٥ ص = ٣٠ يقطع المحورين في النقطتين حـ ، د على الترتيب .

أوجد إحداثيات النقط الأربع أ ، ب ، حـ ، د ثم أوجد مساحة الشكل الرباعي الذي رؤوسه هذه النقط .

(١٠) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣ ، ١) ويكون مع محوري الإحداثيات مثلثا مساحته ٨ وحدات مربعة .

(١١) اكتب معادلة عائلة المستقيمات التي تحقق الشروط المعطاة :

(أ) موازية للمستقيم الذي معادلته ٣ س + ٢ ص + ٤ = ٠

(ب) عمودية على المستقيم الذي معادلته س – ٢ ص + ٣ = ٠

(حـ) تقطع من محور الصادات جزءاً قدره -٤

(د) تقطع من محور السينات جزءاً قدره -٣

(هـ) تمر بالنقطة (٣ ، -٢)

(١٢) أوجد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة (١ ، ١) وبنقطة تقاطع

المستقيمين $ل_١$ = { (س ، ص) : ٢ س + ص -٣ = ٠ }

$ل_٢$ = { (س ، ص) : س + ٤ ص -٧ = ٠ }

(١٣) أوجد معادلة المحل الهندسي لنقطة تتحرك بحيث تكون على بعدين متساويين من النقطتين أ (٢ ، ٥) ، ب (٤ ، ٣)

واثبت تحليلياً أنها تمثل خطاً مستقيماً عمودياً على $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ من منتصفه .

(١٤) $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$ مستقيمان متقاطعان في ب فإذا كانت معادلتيهما

٤ ص + ٣ س = ٧ ، ٣ س - ٤ ص + ٥ = ٠ على الترتيب .

فأوجد معادلة المستقيم المنصف للزاوية أ ب حـ

(إرشاد : منصف $\widehat{\text{أب حـ}}$ هو المحل الهندسي لنقطة تتحرك بحيث بعدها العمودي عن المستقيم الأول $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ = بعدها العمودي عن المستقيم الثاني $\overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$)

* * *

الباب الثاني

الدائــرة

(٢-١) معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها نق .

(٢-٢) معادلة الدائرة بمعلومية مركزها ونصف قطرها .

(٢-٣) الصورة العامة لمعادلة الدائرة .

(٢-٤) تعيين مركز ونصف قطر الدائرة اذا علمت معادلتها .

(٢-٥) معادلة الدائرة بمعلومية نهايتا قطر فيها .

تمارين (٢-١)

(٢-٦) العلاقة بين المستقيم والدائرة .

(٢-٧) العلاقة بين الدائرة ومحوري الأحداثيات .

(٢-٨) طول المماس المرسوم من نقطة معلومة لدائرة .

(٢-٩) معادلة المماس للدائرة عند نقطة معلومة .

تمارين (٢-٢)

(٢-١٠) معادلة المماسين المرسومين من نقطة معلومة لدائرة .

(٢-١١) معادلة وتر التماس لنقطة معلومة بالنسبة للدائرة .

(٢-١٢) معادلة الخط القطبي لنقطة معلومة بالنسبة للدائرة .

(٢-١٣) النقطتان المترافقتان والمثلث المترافق الذاتي بالنسبة للدائرة .

(٢-١٤) معادلة يوخمشتال .

تمارين (٢ – ٣)

(٢–١٥) العلاقة بين دائرتين .

(٢ – ١٦) زاوية تقاطع دائرتين .

(٢–١٧) المعادلة العامة لعائلة الدوائر التي تمر بنقطة تقاطع دائرتين .

(٢–١٨) نقطة التماس ومعادلة المماس المشترك .

تمارين (٢–٤)

***

الباب الثاني

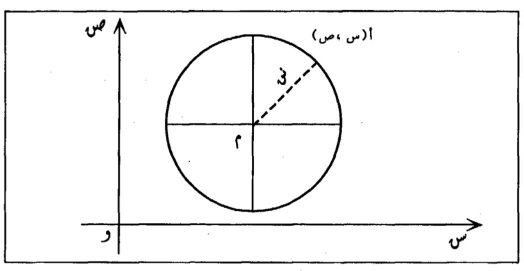
الدائـــرة

في الباب الأول أوضحنا كيفية تمثيل معادلة منحنى ما بيانيا وأوضحنا أيضا معنى معادلة المنحني وكيفية إيجاد معادلة الخط المستقيم في صوره المختلفة .

وفي هذا الباب سنحاول الحصول على الصور المختلفة لمنحنى جديد هو الدائرة لذلك فانه يتوجــب علينــا فـي البداية أن نضع تعريفا هندسيا دقيقا للمنحنى ونعنى به هنا الدائرة .

تعريف :

الدائرة هي مجموعة جميع النقــاط في المستوى والتي على بعد ثابت من نقطة ثابتة . وتسمى النقطة الثابتة بمركز الدائرة والبعد الثابت بنصف قطر الدائرة .



شكل (٢-١)

وبتعبير آخر :

إذا فرضنا نقطة ثابتة م وتحركت النقطة أ (س ، ص) (شكل ٢-١) بحيث تأخذ

أوضاعاً مختلفة شرط أن تكون دائما وفي جميع أوضاعها على بعد ثابت = نق من النقطة الثابتة م . فإن مجموعة جميع الأوضاع التي تأخذها النقطة أ في المستوى تكون دائرة مركزها م .

(٢-١) معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها نق .

إذا اعتبرنا م هي النقطة (٠ ، ٠) (نقطة الأصل) ، أ هي النقطة (س ، ص) فتكون المسافة |أ م| = $\sqrt{س^2 + ص^2}$ وعلى ذلك فإن النقطة أ (س ، ص) تقع على الدائرة التي مركزها م ونصف قطرها نق إذا -وفقط إذا- كان |أ م| = نق أي إذا -وفقط إذا- كان س ، ص تحققان العلاقة .

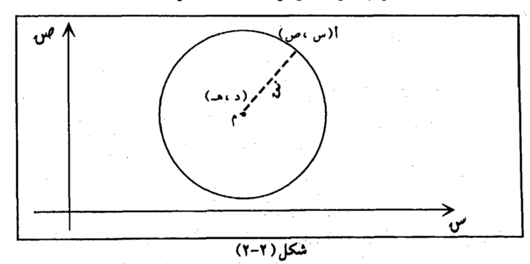
$$\sqrt{س^2 + ص^2} = نق \qquad (١)$$

أي إذا -وفقط إذا- كان (س ، ص) حلا للمعادلة (١)
اذن المعادلة (١) هي معادلة دائرة مركزها (٠ ، ٠) ونصف قطرها نق ويمكن كتابة (١) في صورة آخرى مكافئة لها .

$$س^2 + ص^2 = نق^2$$

والآن فأننا سنحاول الحصول على معادلة الدائرة بحيث تكون نقطة المركز هي أي نقطة أخرى غير نقطة الأصل كما في المثال السابق .

(٢-٢) معادلة الدائرة بمعلومية مركزها ونصف قطرها :



شكل (٢-٢)

إذا اعتبرنا مركز الدائرة م ≡ (د ، هـ)

وطول نصف قطر الدائرة = نق

وفرضنا النقطة أ ≡ (س ، ص) تقع في المستوى (شكل ٢-٢)

المسافة |أم| $= \sqrt{(س-د)^2 + (ص-هـ)^2}$

ولكن النقطة أ تقع على الدائرة إذا -وفقط إذا- كان

|أم| = نق

أي إذا -وفقط إذا- كان (س ، ص) حلا للمعادلة

إذن $\sqrt{(س-د)^2 + (ص-هـ)^2} = نق$ (٢)

وهذه معادلة الدائرة المطلوبة

ولما كان الجذر حقيقي وغير سالب لجميع قيم س ، ص

اذن بتربيع الطرفين نستطيع الحصول على معادلة مكافئة للمعادلة (٢) وتصبح معادلة الدائرة هي

$(س-د)^2 + (ص-هـ)^2 = نق^2$

أي أن الدائرة التي مركزها (د ، هـ) ونصف قطرها نق هي

$د = \{ (س، ص) : (س-د)^2 + (ص-هـ)^2 = نق^2 \}$

(٢-٣) الصورة العامة لمعادلة الدائرة :

الصورة السابقة التي حصلنا عليها في (٢-١) هي صورة معادلة الدائرة التي مركزها (د ،هـ) ونصف قطرها نق وهي :

$(س-د)^2 + (ص-هـ)^2 = نق^2$

$\Leftarrow$ س^{٢} − ٢ د س + د^{٢} + ص^{٢} − ٢ هـ ص + هـ^{٢} − نق^{٢} = ٠

$\Leftarrow$ س^{٢} + ص^{٢} − ٢ د س − ٢ هـ ص + (د^{٢} + هـ^{٢} − نق^{٢}) = ٠

وبوضع −د = ل ، −هـ = ك ، د^{٢} + هـ^{٢} − نق^{٢} = حـ

تصبح المعادلة في الصورة

س^{٢} + ص^{٢} + ٢ ل س + ٢ ك ص + حـ = ٠ (٣)

وتسمى المعادلة (٣) بالصورة العامة لمعادلة الدائرة ويقال أن الدائرة د في صورتها العامة إذا كتبت كما يلي :

د = { (س ،ص) : س^{٢} + ص^{٢} + ٢ ل س + ٢ ك ص + حـ = ٠ }

وإذا ضربت المعادلة (٣) في أ (أي ثابت إختياري) تصبح

أ س^{٢} + أ ص^{٢} + ٢ أ ل س + ٢ أ ك ص + أ حـ = ٠

ويتضح من ذلك أن :

أي معادلة من الدرجة الثانية في س ،ص تكون معادلة دائرة إذا توافر شرطان

١ – أن يكون معامل س^{٢} = معامل ص^{٢}

٢ – أن تكون خالية من الحد الذي يحتوى على س ص أي أن معامل س ص = صفر

فمثلا المعادلة :

٧ س^{٢} + ٧ ص^{٢} − ٨ س − ١٠ ص + ٢٥ = ٠

هي معادلة دائرة بالطبع لانها معادلة من الدرجة الثانية في س ، ص وأيضا فإنها تحقق الشرطان السابقان .

(٢-٤) تعيين مركز ونصف قطر الدائرة إذا علمت معادلتها

إذا فرضنا معادلة منحن ما في الصورة

$$٤ س^{٢} + ٤ ص^{٢} - ٤٨ س - ٦٤ص + ٧٦ = ٠ \qquad (٤)$$

نلاحظ أن :

(١) معامل $س^{٢}$ = معامل $ص^{٢}$ = ٤

(٢) خالية من الحد الذي يحتوى على س ص

إذن المعادلة تمثل دائرة

ولتعيين مركزها ونصف قطرها فإننا نحاول باستخدام مفاهيم الجبر أن نصل بها إلى صورة الدائرة بمعلومية المركز ونصف القطر والتي سبق دراستها وهي :

$(س-د)^{٢} + (ص - هـ)^{٢}$ = نق كما يلي :

من (١) وبالقسم على ٤

$$س^{٢} - ١٢ س + ص^{٢} - ١٦ ص + ١٩ = ٠$$

وباستخدام إكمال المربع تصبح :

$$س^{٢} - ١٢س + (٣٦ - ٣٦) + ص^{٢} - ١٦ص + (٦٤ - ٦٤) + ١٩ = ٠$$

$$(س^{٢} - ١٢س + ٣٦) + (ص^{٢} - ١٦ص + ٦٤) + (١٩-٣٦-٦٤) = ٠$$

$$(س-٦)^{٢} + (ص-٨)^{٢} - ٨١ = ٠$$

$$(س-٦)^{٢} + (ص-٨)^{٢} = ٨١$$

وهذه معادلة دائرة مركزها (٦ ، ٨)

ونصف قطرها = ٩ وحدات

ولكننا لسنا بحاجة في كل مرة أن نكمل المربع ونسير على نفس الخطوات السابقة حيث إن من السهولة بمكان أن نحصل على المركز ونصف القطر بالاستفادة بالمعادلة العامة للدائرة في الصورة $س^{٢} + ص^{٢} + + ٢ ل س + ٢ ك ص + حـ = ٠$

(لاحظ أن معامل س٢ = معامل ص٢ = الوحدة)

إذن $ل = -د$ ، $ك = -هـ$

$\Leftarrow$ $د = -ل$ ، $هـ = -ك$

إذن مركز الدائرة $م \equiv (د ، هـ)$

أي أن $م \equiv (-ل ، -ك)$

إذن $م \equiv (-\frac{١}{٢}$ معامل س ، $-\frac{١}{٢}$ معامل ص $)$

ومن العلاقة :

$د^{٢} + هـ^{٢} - نق^{٢} = حـ$

اذن $ل^{٢} - ك^{٢} - نق^{٢} = حـ$

$\Leftarrow$ $نق^{٢} = ل^{٢} + ك^{٢} - حـ$

$\Leftarrow$ $نق = \sqrt{ل^{٢} + ك^{٢} - حـ}$

وعلى ذلك يكون الطريق الأسهل لحل المثال الذي عرضناه سابقا والمطلوب فيه تعيين مركز ونصف قطر الدائرة .

$٤ س^{٢} + ٤ص^{٢} - ٤٨ س - ٦٤ ص + ٧٦ = ٠$

بالقسمة على ٤

تصبح المعادلة $س^{٢} + ص^{٢} - ١٢ س - ١٦ ص + ١٩ = ٠$

ومنها مباشرة المركز م $\equiv$ ($-\frac{1}{2}$ معامل س ، $-\frac{1}{2}$ معامل ص)

اذن المركز م $\equiv$ (٦ ، ٨)

ونصف القطر نق $= \sqrt{ل^2 + ك^2 - حـ}$

$= \sqrt{٣٦ + ٦٤ - ١٩}$

$= \sqrt{٨١} = ٩$

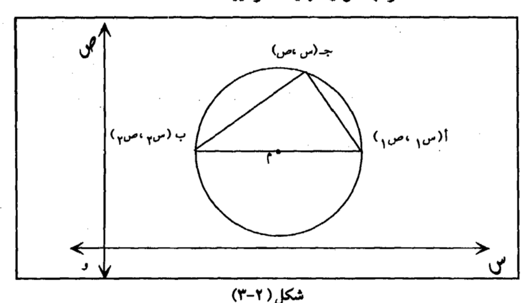
ملاحظات : (١) اذا كان $ل^2 + ك^2 - حـ = ٠$

فأن نق = ٠ وتكون الدائرة نقطة واحدة

(٢) اذا كان $ل^2 + ك^2 - حـ < ٠$ (سالب)

فأن نق٢ = سالب وتكون الدائرة تخيلية

٢ – ٥ معادلة الدائرة بمعلومية نهايتا قطر فيها :



شكل (٢-٣)

ليكن أ ب قطر في الدائرة د ،

أ $\equiv$ (س١ ، ص١) ، ب $\equiv$ (س٢ ، ص٢)

ونفرض النقطة حـ على الدائرة بحيث حـ ≡ (س ،ص)

بما أن أب قطر في الدائرة فإننا نعلم من سابق دراستنا في الهندسة أن زاوية أب حـ = قائمة (مرسومة في نصف دائرة)

أ$\hat{ب}$ حـ = قائمة

⇐ $\overleftrightarrow{أحـ} \perp \overleftrightarrow{ب حـ}$

⇐ ميل $\overleftrightarrow{أحـ}$ × ميل $\overleftrightarrow{ب حـ}$ = −١

⇐ $\frac{ص - ص_١}{س - س_١} \times \frac{ص - ص_٢}{س - س_٢} = -١$

⇐ $(ص - ص_١)(ص - ص_٢) = -(س - س_١)(س - س_٢)$

⇐ $(ص - ص_١)(ص - ص_٢) + (س - س_١)(س - س_٢) = ٠$

وهي معادلة من الدرجة الثانية في س ، ص تتحقق لكل (س ،ص) تقع على الدائرة وتحقق الشرطين المطلوبين .

اذن هي معادلة الدائرة المطلوبة ويمكن كتابة د كما يلي :

د = { (س ،ص) : $(س - س_١)(س - س_٢) + (ص - ص_١)(ص - ص_٢) = ٠$ }

مثال (٢-١) :

اوجد المحل الهندسي لنقطة تتحرك بحيث تكون المسافة بينها وبين النقطة أ(٣ ، ٨) ضعف المسافة بينها وبين النقطة حـ(١ ، ١) . ماذا يمثل ؟

الحـــل :

نفرض النقطة ب (س ، ص) تحقق الشرط المطلوب

اذن |ب أ| = ٢ |ب جـ|

|ب أ|^{٢} = ٤ |ب جـ|^{٢}

(س−٣)^{٢} + (ص − ٨)^{٢} = ٤ [(س − ١)^{٢} + (ص − ١)^{٢}]

س^{٢} − ٦س + ٩ + ص^{٢} − ١٦ص + ٦٤ = ٤ [س^{٢} − ٢س + ١ + ص^{٢} − ٢ص + ١]

س^{٢} − ٦س + ٩ + ص^{٢} − ١٦ص + ٦٤ = ٤ س^{٢} − ٨س + ٤ + ٤ ص^{٢} − ٨ص + ٤]

٣ س^{٢} + ٣ص^{٢} − ٢س + ٨ ص − ٦٥ = ٠

وهذه معادلة دائرة

∴ المحل الهندسي يمثل دائرة

ولايجاد مركز ونصف قطرها

بالقسمة علي (٣) س^{٢} + ص^{٢} − $\frac{٢}{٣}$ س + $\frac{٨}{٣}$ − $\frac{٦٥}{٣}$ = ٠

اذن المركـــــز م ≡ ($\frac{١}{٣}$ ، − $\frac{٤}{٣}$)

ونصف القطر نق = $\sqrt{\frac{١}{٩} + \frac{١٦}{٩} + \frac{٦٥}{٣}}$

= $\frac{٢\sqrt{٥٣}}{٣}$

مثال (٢−٢) :

اوجد معادلة الدائرة التي نهايتا قطر فيها هما النقطتين (١ ،−١) ، (−٣ ,٥) .

الحـــــل :

د = { (س ، ص) : (س−س$_{١}$) (س−س$_{٢}$) + (ص−ص$_{١}$) (ص−ص$_{٢}$) = ٠}

={ (س ، ص) : (س−١) (س + ٣) + (ص + ١) (ص−٥) = ٠}

= { (س ، ص) : س٢ - ٢س - ٣ + ص٢ - ٤ص - ٥ = ٠}

د = { (س ، ص) : س٢ + ص٢ + ٢ س - ٤ ص - ٨ = ٠}

اذن معادلة الدائرة هي

س٢ + ص٢ + ٢س - ٤ص - ٨ = ٠

مثال (٢-٣) :

اوجد معادلة الدائرة التي تمر بالنقط الثلاث (٠ ، - ٢) ، (٨ ، ٢) ، (٣ ,٧)

الحــل :

نفرض معادلة الدائرة في الصورة العامة

س ٢ + ص٢ + ٢ل س + ٢ك ص + حـ = ٠

النقطة (٠ ، -٢) تقع على الدائرة

⇐ ٠ + ٤ + ٠ - ٤ ك + حـ = ٠

٤ - ٤ ك - حـ = ٠ (١)

، النقطة (٨ ، ٢) تقع على الدائرة

⇐ ٦٤ + ٤ + ١٦ل + ٤ ك + حـ = ٠

٦٨ + ١٦ل + ٤ك + حـ = ٠ (٢)

النقطة (٣ ، ٧) تقع على الدائرة

⇐ ٩ + ٤٩ + ٦ل + ١٤ك + حـ = ٠

٥٨ + ٦ل + ١٤ك + حـ = ٠ (٣)

بطرح (١) من (٢)

٦٤ + ١٦ل + ٨ك = ٠ بالقسمة على ٨

٨ + ٢ل + ك = ٠ (٤)

بطرح (١) من (٣)

٥٤ + ٦ل + ١٨ك = ٠ بالقسمة على ٦

٩ + ل + ٢ك = ٠ (٥)

بضرب (٤) × ٢ وطرحها من (٥)

اذن ٩ + ل + ٢ك = ٠

١٦ + ٤ل + ٢ك = ٠

-٧ - ٣ل = ٠

٣ل = -٧

⇐ ل = -٧/٣

وبالتعويض في (٥)

٢ك = - ٢٠/٣

⇐ ك = - ١٠/٣

بالتعويض في (١)

٤ - ٤٠/٣ + حـ = ٠

⇐ حـ = ٢٨/٣

اذن معادلة الدائرة هي $س^2 + ص^2 - \frac{١٤}{٣} س - \frac{٢٠}{٣} ص + \frac{٢٨}{٣} = ٠$

$\Leftarrow$ $٣ س^2 + ٣ص^2 - ١٤س - ٢٠ ص + ٢٨ = ٠$

مثال (٢-٤) :

أوجد معادلة الدائرة التي تمر بالنقطتين (-٢ ، ٠) ،(-٦ ، ٠)

ويقع مركزها على المستقيم س + ص + ١ =

الحـــــــل :

نفرض أن معادلة الدائرة في الصورة العامة

$س^2 + ص^2 + ٢ل س + ٢ ك ص + حـ = ٠$

النقطة (-٢ ، ٠) تقع على الدائرة

٤ + ٠ - ٤ل + حـ = ٠

$\Leftarrow$ ٤ - ٤ل + حـ = ٠ (١)

النقطة (-٦ ، ٠) تقع على الدائرة

٣٦ - ١٢ل + حـ = ٠ (٢)

بطرح (١) من (٢)

٣٢ - ٨ل = ٠

٨ل = ٣٢

$\Leftarrow$ ل = ٤ (٣)

بالتعويض في (١)

٤ - ١٦ + حـ = ٠

حـ = ١٢ (٤)

بما ان مركز الدائرة (-ل ، -ك) يقع على المستقيم س + ص + ١ = ٠

أي أن -ل -ك + ١ = ٠

إذن -٤ -ك + ١ = ٠

⇐ ك = -٣ (٥)

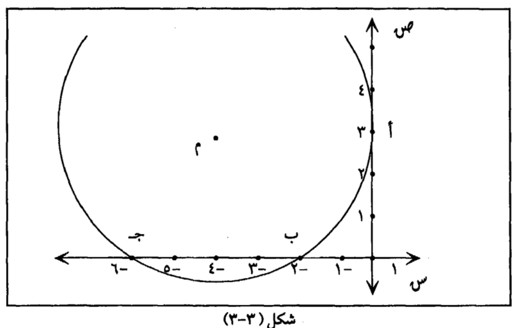
من (٣) ، (٤) ، (٥) اذن معادلة الدائرة المطلوبة هي :

$س^{2} + ص^{2} + ٢ \times ٤ س + ٢ (-٣) ص + ١٢ = ٠$

⇐ $س^{2} + ص^{2} + ٨س - ٦ص + ١٢ = ٠$

مثال (٢-٥) :

إذا كان أ ب حـ د شكل رباعي رؤوسه على الترتيب (٠ ,٣) ، (-٢ ، ٠) (-٦ ، ٠) ، (٠ ، ٤) فاثبت أن أ ب حـ د رباعي دائري .



شكل (٣-٣)

الحـــــل :

لكن نثبت أن الشكل رباعي دائري لابد أن نثبت أن النقط الأربع أ ، ب ، حـ ، د تقع جميعا على محيط دائرة واحدة .

لذلك نوجد معادلة الدائرة بمعلومية أي ثلاث نقط من الرؤوس ونثبت أنها أيضا تمر بالرأس الرابع كما يلي :

نفرض معادلة الدائرة في الصورة العامة

$س^{٢} + ص^{٢} + ٢ ل س + ٢ ك ص + حـ = ٠$

النقطة (٠ ، ٣) تقع على الدائرة

٠ + ٩ + ٠ + ٦ ك + حـ = ٠

$\Leftarrow$ ٩ + ٦ك + حـ = ٠ (١)

، النقطة (٠ ، ٤) تقع على الدائرة

٠ + ١٦ + ٠ + ٨ك + حـ = ٠

$\Leftarrow$ ١٦ + ٨ ك + حـ = ٠ (٢)

بطرح (١) من (٢)

٧ + ٢ ك = ٠

ك = $-\frac{٧}{٢}$ (٣)

بالتعويض في (١)

٩ + ٦ $(-\frac{٧}{٢})$ + حـ = ٠

$\Leftarrow$ -١٢ + حـ = ٠

$\Leftarrow$ حـ = ١٢ (٤)

النقطة (-٢ ، ٠) تقع على الدائرة

٤ + ٠ - ٤ل + ٠ + حـ = ٠

$\Leftarrow$ ٤ - ٤ل + حـ = ٠

بالتعويض عن حـ = ١٢ من (٤)

٤ - ٤ ل + ١٢ = ٠

-٤ل = -١٦

$\Leftarrow$ ل = ٤ (٥)

من (٣) ، (٤) ، (٥) وبالتعويض في الصورة العامة

اذن معادلة الدائرة هي

س^٢ + ص^٢ + ٨س - ٧ص + ١٢ = ٠

بالتعويض بالنقطة (-٦ ، ٠)

الطرف الأيمن = ٣٦ + ٠ + ٨ (-٦) - ٧ × ٠ + ١٢

= ٣٦ - ٤٨ + ١٢

= ٤٨ - ٤٨

= ٠

اذن النقطة حـ (-٦ ، ٠) تحقق معادلة الدائرة

أي أن النقطة حـ (-٦ ، ٠) تقع على الدائرة التي تمر بالنقط أ ، ب ، د

إذن أ ، ب ، حـ ، د يمر بها محيط دائرة واحد .

$\Leftarrow$ أ ب حـ د شكل رباعي دائري .

تمــارين (٢-١)

١ - أوجد معادلة الدائرة التي تحقق الشرط

(أ) مركزها (-٣ ، ٥) وتمر بنقطة الأصل

(ب) مركزها نقطة الأصل وتمر بالنقطة (٢ ، ٥) .

(حـ) مركزها النقطة (٤ ، ٣) وتمر بالنقطة (١ ،-١) .

٢ - أوجد معادلة الدائرة التي نهايتها قطر فيها النقطتين (-٢ ، ٧) ، (٤ ,٥) .

٣ - أوجد معادلة الدائرة التي تمر بالنقط الثلاث (٠ ، ٤) ، (٠ ، ٢) ونقطة الأصل .

٤ - أوجد معادلة الدائرة التي تمر بالنقط الثلاث (٠ ،-٢) ، (٨ ,٢) ، (٣ ,٧) .

٥ - أوجد مركز ونصف قطر كل من الدوائر الآتية معادلتها :

(أ) س٢ + ص٢+ ٢س -٢ص + ١١ = ٠

(ب) س٢ + ص٢ + ل س + ك ص = ٠

(حـ) ٤س٢ + ٤ص٢ + ٢٤س + ٤ص +٩ =

٦ - إذا كانت معادلة الدائرة في الصورة س٢ + ص٢ = ٢س فبرهن على أن الشرط اللازم لتقع النقطة أ (س ،ص) حيث س ،ص عددين حقيقيين داخل الدائرة هو س٢ + ص٢ < ٢س .

ماذا يمكنك القول عن وضع النقطة أ (س ،ص) إذا كان س٢ + ص٢ > ٢س .

٧ - أ هي النقطة (-١ ،٥) ، ب هي النقطة (٢ ,٤) فإذا كانت حـ نقطة تتحرك بحيث قياس زاوية أ حـ ب قائمة أوجد المحل الهندسي للنقطة حـ ماذا يمثل؟

٨ - أوجد المحل الهندسي للنقطة أ (س ،ص) إذا كان مجموع مربعي بعديهما عن النقطتين (-٥ ,٢) ، (١ ,٤) يساوي ٥٢

وبين نوع المنحنى الناتج .

(٢-٦) العلاقة بين المستقيم والدائرة

فيما سبق إستطعنا أن نحصل على الصور المختلفة لمعادلة المستقيم ولمعادلة الدائرة والسؤال الذي يطرح نفسه ما هي صور العلاقة بين المستقيم والدائرة؟

إن العلاقة بين المستقيم والدائرة لا تخرج عن صور ثلاث :

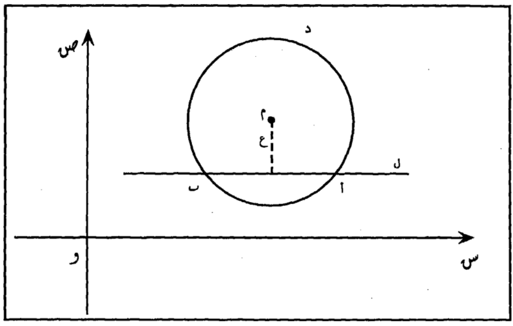
الأولى :أن يقطع المستقيم الدائرة في نقطتين $ل \cap د = \{أ ، ب\}$

الثانية :أن يمس المستقيم الدائرة $ل \cap د = \{أ\}$

الثالثة : أن يتباعد المستقيم والدائرة $ل \cap د = \emptyset$

ولمزيد من التوضيح والتفصيل نحاول دراسة كل صوره على حده ونفضل أن نبدأ بدراسة هندسية ثم ننتقل إلى الدراسة الجبرية .

الصورة الأولى :المستقيم يقطع الدائرة في نقطتين



شكل (٢ - ٤)

بالنظر إلى شكل (٢-٤) : المستقيم ل يقطع الدائرة د في النقطتين أ ، ب

ع هو طول العمود الساقط من مركز الدائرة د على المستقيم ل

نلاحظ في هذه الصورة (صورة التقاطع في نقطتين) أن

طول هذا العمود < نق

فإذا فرضنا أن ل = { (س ، ص) : ص = م س + حـ }

، د = { (س ،ص) : $س^{٢} + ص^{٢} = نق^{٢}$ }

فإن شرط تقاطع المستقيم ل والدائرة د هو

ع < نق

$$\frac{|٠ - ٠ - جـ|}{\sqrt{١ + م^{٢}}} < نق$$

$$\frac{جـ}{\sqrt{١ + م^{٢}}} < نق$$

الصورة الثانية : المستقيم يمس الدائرة

شكل (٢-٥)

من شكل (٢-٥) تتضح العلاقة الهندسية بين المستقيم ل والدائرة د

في هذه الصورة حيث يكون طول العمود الساقط من المركز على المستقيم

= نصف قطر الدائرة

أي أن شرط تماس المستقيم والدائرة هو ع = نق

فإذا كان ل = { (س ، ص) : ص = م س + حـ }

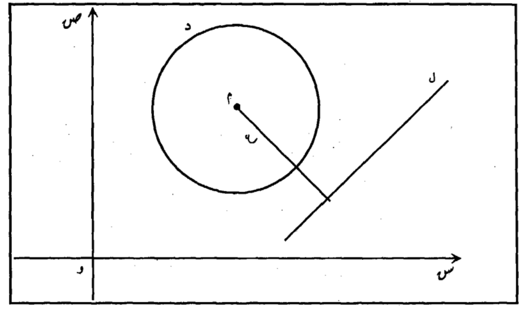
، د = { (س ،ص) : $س^{٢} + ص^{٢} = نق^{٢}$ }

فإن الشرط اللازم ليمس المستقيم ل الدائرة د هو

$$\frac{|٠ - ٠ - جـ|}{\sqrt{١ + م^{٢}}} = نق^{٢}$$

$$\frac{جـ}{\sqrt{١ + م^{٢}}} = نق$$

الصورة الثالثة : المستقيم والدائرة متباعدان



شكل (٢-٦)

بالنظر إلى شكل (٢-٦) تتضح العلاقة الهندسية بين ل ، د في هذه الصورة حيث يكون

طول العمود الساقط من مركز الدائرة على المستقيم > نصف القطر

أي أن شرط التباعد بين المستقيم ل والدائرة د حيث

ل = { (س ، ص) : ص = م س + حـ } والدائرة

د = { (س ، ص) : $س^2 + ص^2 = نق^2$ }

هو $\frac{|٠ - ٠ - جـ|}{\sqrt{١ + م^2}} >$ نق

$\frac{جـ}{\sqrt{١ + م^2}} >$ نق

والآن نبدأ بمناقشة الأوضاع الثلاثة السابقة جبريا

إذا أردنا التعرف على صورة العلاقة بين المستقيم والدائرة فإننا نحاول الحصول على النقاط المشتركة بينهما ويكون ذلك عن طريق الحل الجبري لمعادلتيهما معا .

فإذا كانت معادلة المستقيم ل = { (س ، ص) : ص = م س + حـ }

، معادلة الدائـــرة د = {(س ، ص) : $س^2 + ص^2 = نق^2$ }

وفرضنا أن بينهما نقطة مشتركة ($س_١$ ، $ص_١$)

أي أن ($س_١$ ، $ص_١$) تقع على المستقيم ل ، اذن تحقق معادلة المستقيم وبالتالي فإن

$ص_١ = م س_١ +$ حـ (١)

وأيضا ($س_١$ ، $ص_١$) تقع على الدائرة اذن تحقق معادلة الدائرة وبالتالي فإن

$س_١^٢ + ص_١^٢ = نق^٢$ (٢)

والمعادلتان (١) ، (٢) انيتان في $س_١$ ، $ص_١$ إحداهما من الدرجة الأولى والثانية من الدرجة الثانية ويحلهما جبريا كما يلي :

بالتعويض من (١) في (٢) نحصل على

$س_١^٢ + (م س_١ + حـ)^٢ = نق^٢$

$س_١^٢ + م^٢ س_١^٢ + ٢م حـ س_١ + حـ^٢ - نق^٢ = ٠$

$(١+م^٢) س^٢ + ٢م حـ س_١ + (حـ^٢ - نق^٢) = ٠$ (٣)

وهذه معادلة من الدرجة الثانية في $س_١$ مميزها $ب^٢ - ٤أ حـَ$ حيث أ معامل $س_١^٢$ ، ب معامل $س_١$ ، حـَ الحد المطلق .

وهنا نتعرض للحالات ثلاث :

الأولى : إذا كان المميز $ب^٢ - ٤ أ حـَ >$.

وهذا معناه أن المعادلة (٣) لها جذرين حقيقيين مختلفين $س_١$ ، $س_٢$ وبالتعويض في (١) ينتج قيمتي $ص_١$ ، $ص_٢$.

ويكون للمستقيم مع الدائرة نقطتي تقاطع هما $(س_١ ، ص_١)$ ، $(س_٢ ، ص_٢)$

والثانية : إذ كان المميز $ب^٢ - ٤أ حـَ = ٠$

وهذا معناه أن المعادلة (٣) لها جذرين حقيقيين منطبقين «متساويين» أي نقطتي التقاطع تنطبقان وبالتالي فإن المستقيم يمس الدائرة .

والثالثة : إذا كان المميز $ب^٢ - ٤أ حـَ < ٠$

فهذا معناه أن المعادلة (٣) لها جذرين تخيليين أي أن المستقيم لا يقطع الدائرة وبالتالى فإن المستقيم والدائرة متباعدان .

ملاحظة :

يمكن إيجاد شرط تماس مستقيم ودائرة جبرياً .

إذا فرضنا أن المستقيم ل = { (س ، ص) : ص = م س + حـ }

والدائرة د = { (س ،ص) : $س^{٢}$ + $ص^{٢}$ = $نق^{٢}$ }

فباتباع نفس الخطوات السابقة ومن المعادلة (٣)

نجد أن شرط تماس المستقيم ل ، الدائرة د

هو أن المميز = ٠

$ب^{٢}$ - ٤ أحـ = ٠

٤ $م^{٢}$ $حـ^{٢}$ - ٤ (١+$م^{٢}$)($حـ^{٢}$ - $نق^{٢}$) = ٠

$م^{٢}$ $حـ^{٢}$ - $حـ^{٢}$ + $نق^{٢}$ - $م^{٢}$ $حـ^{٢}$ + $م^{٢}$ $نق^{٢}$ = ٠

$حـ^{٢}$ = $نق^{٢}$ + $م^{٢}$ $نق^{٢}$

$حـ^{٢}$ = $نق^{٢}$ (١+ $م^{٢}$)

حـ = نق $\sqrt{١ + م^{٢}}$

نق = $\frac{جـ}{\sqrt{١ + م^{٢}}}$

وهو نفس الشرط الذي إستنتجناه بالعلاقات الهندسية

ومن هذا الشرط فإن المستقيم ص = م س + نق $\sqrt{١ + م^{٢}}$

يمس الدائرة $س^{٢}$ + $ص^{٢}$ = $نق^{٢}$ لجميع قيم م الحقيقية

مثال (٢-٦) :

أوجد نقطتي تقاطع المستقيم ل = {(س ، ص) : ص = س+٤}

والدائرة د = {(س ، ص) : س^{٢}+ ص^{٢} + ٢س -٨ص + ٤ = ٠}

الحـــل :

بحل معادلة المستقيم والدائرة آنيا

(بالتعويض من معادلة المستقيم في معادلة الدائرة نحصل على)

س^{٢}+ (س+٤)^{٢} + ٢س -٨ (س+٤) +٤ = ٠

س^{٢} + س^{٢} + ٨س + ١٦ + ٢س - ٨س -٣٢ + ٤ =٠

٢ س^{٢} + ٢س -١٢ = ٠ بالقسمة على ٢

س^{٢} + س -٦ = ٠ (١)

وهذه معادلة من الدرجة الثانية في س

أ = ١ ب=١ حـ = -٦

ب^{٢} -٤أحـ = ١-٤× ١× (-٦)

= ١+ ٢٤ = ٢٥ >٠

المعادلة (١) لها جذران حقيقيان مختلفان

من (١) وبالتحليل

(س+ ٣) (س -٢) =٠

س + ٣ = ٠ أو س - ٢ = ٠

س = -٣ أو س = ٢

وبالتعويض في معادلة المستقيم

إذن ص = ١ أو ص = ٦

أي أن نقطتي تقاطع المستقيم ل والدائرة د هما (-٣ ، ١) ، (٢ ، ٦)

مثال (٢-٧) :

أوجد معادلة الدائرة التي مركزها (١ ,٤) وتمس المستقيم

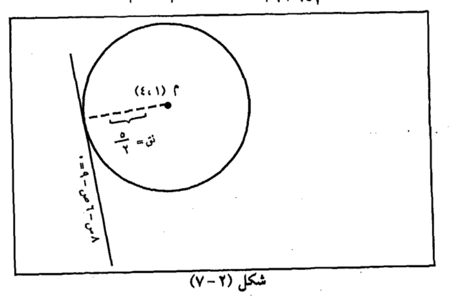
ل = {(س ، ص) : ٨س - ٦ص -٩ = ٠ }

الحـــل :

بما أن المستقيم يمس الدائرة

إذن نق = طول العمود الساقط من المركز على المستقيم ل

$$= \frac{|٨\times١ - ٦\times٤ - ٩|}{\sqrt{٦٤+٣٦}} = \frac{٢٥}{١٠} = \frac{٥}{٢}$$



شكل (٢ - ٧)

إذن مركز الدائرة م ≡ (١ ، ٤) ، نصف قطرها نق = $\frac{٥}{٢}$ (شكل (٢-٧))

إذن معادلتها هي $(س-١)^٢ + (ص-٤)^٢ = \frac{٢٥}{٤}$

س^{2} − ٢س + ١ + ص^{2} − ٨ص + ١٦ − $\frac{٢٥}{٤}$ = ٠

س^{2} + ص٢ − ٢س − ٨ ص + $\frac{٤٣}{٤}$ = ٠

٤س^{2} + ٤ص^{2} −٨س −٣٢ص + ٤٣ = ٠

(٢−٧) العلاقة بين الدائرة ومحوري الإحداثيات :

أوضحنا فيما سبق الصور الثلاثة لعلاقة المستقيم والدائرة والآن ماذا لو كان المستقيم هو أحد محوري الإحداثيات سنناقش فيما يلي الصور المختلفة لعلاقة الدائرة مع محوري الإحداثيات .

أولاً : تقاطع الدائرة مع محوري الإحداثيات :

نفرض الدائرة د = {(س ،ص) : س^{2}+ ص^{2}+٢ل س+٢ك ص+ حـ= ٠} (١)

ومحور السينات هو المستقيم = { (س ، ص) : ص = ٠ } (٢)

بوضع ص = ٠ في معادلة الدائرة

س^{2} + ٢ل س + حـ = ٠ (٣)

وهذه معادلة من الدرجة الثانية في س

مميزها = ٤ ل^{2} −٤ حـ = ٤ (ل^{2}−حـ)

وشرط أن تقطع الدائرة محور السينات في نقطتين هو وجود جذرين حقيقيين مختلفين للمعادلة (٣)

أي أن مميزها > ٠

أذن ٤ (ل^{2} − حـ) > ٠

وعليه فأن ل^{2} > حـ هو شرط تقاطع الدائرة مع محور السينات في نقطتين .

وبالمثل فإن شرط تقاطع الدائرة مع محور الصادات في نقطتين أيضا هو

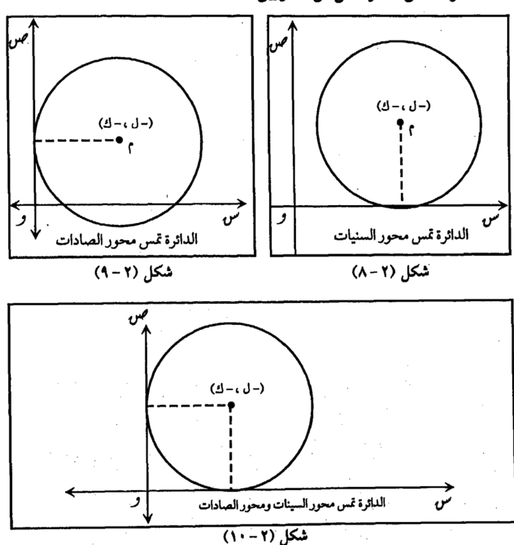
$$ك^{٢} > حـ$$

ثانياً : تباعد الدائرة عن محوري الإحداثيات

من أولا نجد أن شرط تباعد الدائرة عن محور السينات (لا تقطعه في أي نقطة) هو $ل^{٢} < حـ$

، وشرط تباعد الدائرة عن محور الصادات هو $ك^{٢} < حـ$

ثالثا : شرط تماس الدائرة لكل من المحورين :



شكل (٢ – ٨)

شكل (٢ – ٩)

شكل (٢ – ١٠)

أوضحنا فيما سبق أن شرط تماس أي مستقيم ودائرة أن يكون مميز معادلة الحل = صفراً وعليه فأن :

(١) الدائرة تمس محور السينات إذا كان

$$٤(ل^٢ - حـ) = ٠$$

$$\text{اذن} \quad ل^٢ = حـ \qquad (١)$$

ولكننا نلاحظ من شكل (٢-٨) أنه كي يمس محور السينات الدائرة فإن

$$نق = |ك| \qquad (٢)$$

والعلاقتان (١) ، (٢) لهما نفس الدلالة فإحداهما تؤدى للأخرى ، ولكن العلاقة الثانية تستخدم كثيرا عند حل مسائل التماس مع أي من المحورين أو كليهما .

(٢) الدائرة تمس محور الصادات اذا كان

$$٤(ك^٢ - حـ) = ٠$$

$$\text{اذن} \quad ل٢ = حـ \qquad (٣)$$

ومن الشكل (٢-٩) فإن الدائرة تمس محور الصادات إذا كان

$$نق = |ل| \qquad (٤)$$

وأيضا العلاقتان (٣) ، (٤) لهما نفس الدلالة لأن إحداهما تؤدى للأخرى أيضا والعلاقة الثانية هي الأكثر إستخداما عند حل المسائل .

(٣) الدائرة تمس المحورين إذا كان

$$ل^٢ = ك^٢ = حـ$$

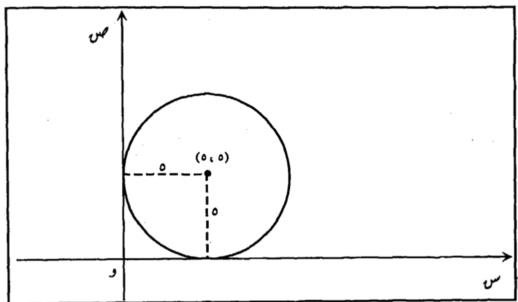
$$\text{اذن} \quad ل = ك = \sqrt{حـ} \quad ،$$

ومن شكل (٢-١٠) فإن الدائرة تمس المحورين اذا كان $|ل| = |ك| = نق$

وهنا يجدر الإشارة إلى أنه لتعيين مركز الدائرة فإن إشارة ل أو ك تكون حسب الربع الذي تقع فيه الدائرة .

مثال (٢-٨) :

أوجد معادلة الدائرة التي تمس كلا من المحورين ونصف قطرها يساوي ٥ سم وتقع في الربع الأول .



شكل (٢-١)

الحل :

بما أن الدائرة تمس كلا من المحورين

إذن |ل| = |ك| = نق

⇐ |ل| = |ك| = ٥

بما أن الدائرة تقع في الربع الأول

إذن مركز الدائرة هو (٥ ، ٥) ، ونصف قطرها ٥ وحدات

إذن معادلتها هي :

$$(س - ٥)^٢ + (ص - ٥)^٢ = ٢٥$$

$$س^٢ - ١٠س + ٢٥ + ص^٢ - ١٠ص + ٢٥ = ٢٥$$

$$س^٢ + ص^٢ - ١٠س - ١٠ص + ٢٥ = ٠$$

هي معادلة الدائرة المطلوبة

مثال (٢-٩) :

أثبت أن الدائرة $س^٢ + ص^٢ + ٦س - ٨ص + ١٦ = ٠$ تمس محور الصادات

الحـــل :

من معادلة الدائرة فإن

$$ك = -٤ \quad ، \quad حـ = ١٦$$

$$ك^٢ = ١٦$$

$$ك^٢ = حـ$$

الدائرة تمس محور الصادرات

حل آخر : من معادلة الدائرة

$$ك = -٤ \quad ، \quad ل = ٣ \quad ، \quad حـ = ١٦$$

$$نق = \sqrt{ل^٢ + ك^٢ - حـ}$$

$$= \sqrt{٩ + ١٦ - ١٦}$$

$$= \sqrt{٩} = ٣$$

$$|ل| = نق$$

الدائرة تمس محور الصادات

مثال (٢-١٠) :

أوجد نقاط تقاطع الدائرة

د = { (س ، ص) : س^{٢} + ص^{٢} - ٢س + ص + ١ = ٠ }

(إن وجدت) مع كل من محوري السينات والصادات

الحـــل :

بوضع ص = ٠ في معادلة الدائرة

(للحصول على نقط التقاطع مع محور السينات)

س^{٢} - ٢ س + ١ = ٠

(س - ١)^{٢} = ٠ (١)

الطرق الأيمن في (١) هو مربع كامل أي أن مميز المعادلة (١) = صفراً

إذن الدائرة تمس محور السينات عند س = ١

أي عند النقطة (١ ، ٠)

، بوضع س = ٠ في معادلة الدائرة

(للحصول على نقط التقاطع مع محور الصادات)

ص^{٢} + ص + ١ = ٠

المميز = ب^{٢} - ٤ أحـ = ١-٤ × ١ × ١

= -٣ < ٠ إذن الجذران تخيليان

وبالتالي فإن الدائرة لا يمكن أن تقطع محور الصادات في أي نقطة

مثال (٢-١١)

أوجد النقط الأربع لتقاطع الدائرة

د = { (س ، ص) : س^{٢} + ص^{٢} -٨س + ٧ص + ١٢ = ٠}

مع محوري الإحداثيات ثم أوجد طول وتري التقاطع

الحـــل :

بوضع ص = ٠ في معادلة الدائرة

س^{٢} - ٨ س + ١٢ = ٠

(س -٢) (س-٦) = ٠

س = ٢ أو س = ٦

إذن نقطتي التقاطع مع محور السينات هما

(٢ ، ٠) ، (٦ ، ٠)

بوضع س = ٠ في معادلة الدائرة

ص^{٢} + ٧ص + ١٢ = ٠

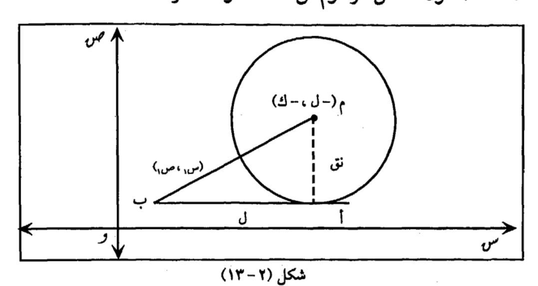
(ص+٣) (ص+٤) = ٠

ص = -٣ أو ص=-٤

اذن نقطتي تقاطع الدائرة مع محور الصادات هي

(٠ ، -٣) ، (٠ ، -٤)

(٢ – ٨) طول المماس المرسوم من نقطة معلومة لدائرة



شكل (٢ – ١٣)

نفرض الدائرة د = { (س ،ص) : $س^2 + ص^2 + ٢ ل س + ٢ك ص + حـ = ٠$ }

، ب ≡ (س١ ، ص١) نقطة خارجها

رسم ب أ مماسا للدائرة من النقطة ب يمس الدائرة عند أ

المطلوب إيجاد طول المماس |ب أ|

البرهان : مركز الدائرة م ≡ (–ل ، –ك)

نصل كلا من م أ ، م ب

Δ م أ ب قائم الزاوية في أ

من نظرية فيثا غورث

$|ب م|^2 = |م أ|^2 + |أ ب|^2$

$|أ ب|^2 = |ب م|^2 - |م أ|^2$

$$|أب|^2 = (س_1 + ل)^2 + (ص_1 + ك)^2 - نق^2$$

$$= س_1^2 + 2 ل س_1 + ل^2 + ص_1^2 + 2 ك ص_1 + ك^2 - نق^2$$

$$= س_1^2 + ص_1^2 + 2 ل س_1 + 2 ك ص_1 + (ل^2 + ك^2 - نق^2)$$

$$= س_1^2 + ص_1^2 + 2 ل س_1 + 2 ك ص_1 + حـ$$

$$|أب| = \sqrt{س_1^2 + ص_1^2 + 2 ل س_1 + 2 ك ص_1 + حـ}$$

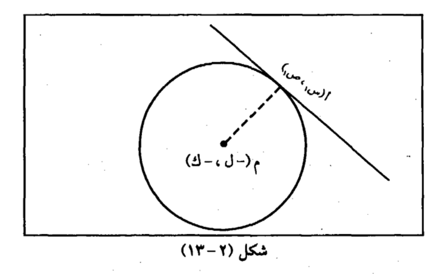
ملاحظات هامة :

١ - إذاكان مربع طول المماس = مقدار موجبا فإن النقطة تقع خارج الدائرة وبالتالي فإنه يمكن رسم مماس منها للدائرة .

٢ - إذا كان مربع طول المماس = صفراً فهذا يعني أن النقطة تقع على الدائرة وتحقق معادلتها .

٣ - إذا كان مربع طول المماس = مقداراً سالبا يكون المماس تخيلي ولا يمكن رسم مماس للدائرة من النقطة والتفسير الهندسي لذلك أن النقطة تقع داخل الدائرة .

(٢ - ٩) معادله المماس للدائرة عند نقطة معلومة :



شكل (٢ - ١٣)

نفرض الدائرة $\text{د} = \{ (\text{س} ، \text{ص}) : \text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} + ٢\text{ل}\,\text{س} + ٢\text{ك}\,\text{ص} + \text{حـ} = ٠ \}$

، المستقيم ل يمس الدائرة عند النقطة أ $(\text{س}_{١} ، \text{ص}_{١})$

ميل المماس عند نقطة أ $= \left(\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}}\right)_{\text{أ}}$

حيث $\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}}$ المشتقة الأولى لمعادلة الدائرة ومن معادلة الدائرة نجد ان

$$٢\text{س} + ٢\text{ص}\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}} + ٢\text{ل} + ٢\text{ك}\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٠$$

$$٢\text{ص}\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}} + ٢\text{ك}\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}} = -٢\text{ل} - ٢\text{س}$$

$$(\text{ص} + \text{ك})\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}} = -(\text{س} + \text{ل})$$

اذن $$\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}} = \dfrac{-(\text{س} + \text{ل})}{\text{ص} + \text{ك}}$$

م = ميل المماس عند النقطة $(\text{س}_{١} ، \text{ص}_{١})$

$$= \left.\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{(\text{س}_{١} ، \text{ص}_{١})}$$

$$= \dfrac{-(\text{س}_{١} + \text{ل})}{\text{ص}_{١} + \text{ك}}$$

اذن معادلة المماس هي :

$$\text{ص} - \text{ص}_{١} = \dfrac{-(\text{س}_{١} + \text{ل})}{\text{ص}_{١} + \text{ك}} (\text{س} - \text{س}_{١})$$

$$\text{ص}\,\text{ص}_{١} - \text{ص}_{١}^{٢} + \text{ك}\,\text{ص} - \text{ك}\,\text{ص}_{١} = -\text{س}\,\text{س}_{١} + \text{س}_{١}^{٢} - \text{ل}\,\text{س} + \text{ل}\,\text{س}_{١}$$

$$\text{س}\,\text{س}_{١} + \text{ص}\,\text{ص}_{١} + \text{ل}\,\text{س} + \text{ك}\,\text{ص} = \text{س}_{١}^{٢} + \text{ص}_{١}^{٢} + \text{ل}\,\text{س}_{١} + \text{ك}\,\text{ص}_{١}$$

بإضافة $\text{ل}\,\text{س}_{١} + \text{ك}\,\text{ص}_{١} + \text{حـ}$ إلى الطرفين نحصل على

$$\text{س}\,\text{س}_{١} + \text{ص}\,\text{ص}_{١} + \text{ل}\,(\text{س} + \text{س}_{١}) + \text{ك}\,(\text{ص} + \text{ص}_{١})$$

$$= \text{س}_{١}^{٢} + \text{ص}_{١}^{٢} + ٢\text{ل}\,\text{س}_{١} + ٢\text{ك}\,\text{ص}_{١} + \text{حـ}$$

وتكون معادلة المماس للدائرة د عند النقطة ($س_1$ ، $ص_1$) هي :

$س س_1 + ص ص_1 + ل (س + س_1) + ك (ص + ص_1) + حـ = ٠$

مثال (٢ – ١٢)

أوجد طول المماس المرسوم من النقطة (–٢ ، ٥) للدائرة

الحل :

د = { (س ، ص) : $س^2 + ص^2 - ٦ س + ٨ ص + ١٩ = ٠$ }

طول المماس = $\sqrt{س_1^{\ 2} + ص_1^{\ 2} + ٢ ل س_1 + ٢ ك ص_1 + حـ}$

= $\sqrt{٤ + ٢٥ + ١٢ + ٤٠ + ١٩}$

= $\sqrt{١٠٠}$ = ١٠ وحدات طول

مثال (٢ – ١٣)

وضح وضع النقطة (١ ، ١) بالنسبة للدائرة :

د = { (س ، ص) : $س^2 + ص^2 - ٤ س + ٦ ص - ٤ = ٠$ }

وإذا كانت تقع عليها فأوجد معادلة المماس عندها للدائرة المذكورة

الحــــل :

بالتعويض بالنقطة (١ ، ١) في معادلة الدائرة

الطرف الأيمن = ١ + ١ – ٤ + ٦ – ٤

= ٠

إذن النقطة تحقق معادلة الدائرة أي أن النقطة تقع عـلى الدائرة

وتكون معادلة المماس المطلوبة هي :

$س س_1 + ص ص_1 - ٢ (س + س_1) + ٣ (ص + ص_1) - ٤ = ٠$

$س + ص - ٢ (س + ١) + ٣ (ص + ١) - ٤ = ٠$

$- س + ٤ ص - ٣ = ٠$ إذن $س - ٤ ص + ٣ = ٠$

تمثل معادلة المماس للدائرة عند النقطة (١ ، ١)

تمارين (٢ - ٢)

(١) أوجد معادلة الدائرة التي تمس محور الصادات وتقطع محور السينات في النقطتين (٣ ، ٠) ، (٧ ، ٠)

(٢) أوجد معادلة الدائرة التي تمس المحورين وتقع في الربع الرابع ويقع مركزها على المستقيم ٤ س + ٦ ص - ٢٤ = ٠

(٣) أوجد معادلة الدائرة التي تمر بنقطة الأصل وتقطع من محور السينات جزءاً قدره ٨ وحدات ومن محور الصادات جزءاً قدره ٦ وحدات ٠

(٤) إذا كانت أ هي النقطة (-١ ، ٥) ، ب هي النقطة (٣ ، -٢) ، حـ نقطة تتحرك بحيث تكون زاوية أ حـ ب قائمة اثبت المحل الهندسي للنقطة حـ هو محيط دائرة واوجد مركزها ونصف قطرها ٠

(٥) أوجد نقطتي تقاطع المستقيم س + ص - ١ = ٠ والدائرة

س^{2} + ص^{2} + ٦ س - ٨ ص + ١٧ = ٠

(٦) أوجد معادلة المماس المرسوم عند النقطة (٣ ، ٤) للدائرة

س^{2} + ص^{2} + ٦ س - ٨ ص - ١١ = ٠

(٧) أوجد معادلة الدائرة التي مركزها (٣ ، -٤) وتمس المستقيم

٤ س + ٣ ص + ٢٠ = ٠

(٨) أوجد نقطة تقاطع المماسين للدائرة س ٢ + ص ٢ + ١٦ س + ٣٠ ص = ٠

عند النقطتين (٠ ، ٠) ، (-١٦ ، ٠)

(٩) أوجد نقط تقاطع محوري الإحداثيات مع الدائرة

س^{٢} + ص^{٢} − ١١ س + ٩ ص + ١٨ = ٠ وطول وترى التقاطع الحادثين .

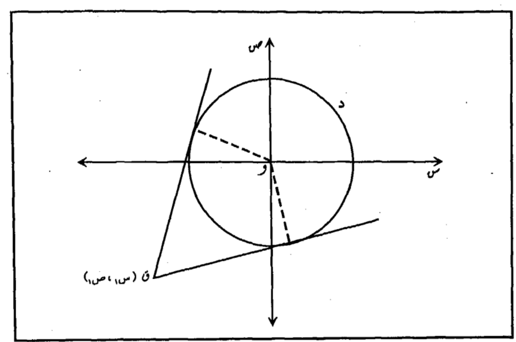
(١٠) اثبت أن الدائرة   س ٢ + ص ٢ + ١٤ س + ١٤ص + ٤٩ = ٠

تمس كلا مـــن المحورين . واذكر الربع الذي تقع فيه الدائرة .

وأوجد نقطتين التماس .

***

(٢ – ١٠) معادلة المماسين المرسومين من نقطة معلومة لدائرة :



شكل (٢ – ١٤)

إذا كانت د هي الدائرة {(س ، ص) : $س^2 + ص^2 = نق^2$ }

، ق ≡ (س١ ، ص١) رسم منها مماسان للدائرة

(كما سبق وأوضحنا فإن المستقيم $ص_1 = م س_1 \pm \sqrt{1 + م^2}$ نق

يمس الدائرة لجميع قيم م)

معادلة المماس عند (س١ ، ص١) هي $ص_1 = م س_1 \pm \sqrt{1 + م^2}$ نق

إذن $(ص_1 - م س_1)^2 = نق^2 (1 + م^2)$

$ص_1^2 - 2 م س_1 ص_1 + م^2 س_1^2 = نق^2 + نق^2 م^2$

$(س_1^2 - نق^2) م^2 - 2 س_1 ص_1 م + (ص_1^2 - نق^2) = 0$ (١)

وهذه معادلة من الدرجة الثانية في م جذريها $م_1$ ، $م_2$

ويكون المماسان المطلوبان هما :

$ل_1$ = {(س ، ص) : ص − $ص_1$ = $م_1$ (س − $س_1$)} ،

$ل_2$ = {(س ، ص) : ص − $ص_1$ = $م_2$ (س − $س_1$)}

اذن من كل نقطة معلومة خارج دائرة ما يمكن رسم مماسين لها

نتيجة :

لإيجاد المحل الهندسي للنقطة $ق_1$ التي يمكن رسم مماسين متعامدين منها للدائرة د = {(س ، ص) : $س^2$ + $ص^2$ = $نق^2$} :

بما أن المماسين متعامدين

اذن $م_1 م_2$ = −١ (٢)

من المعادلة (١) نجد أن حاصل ضرب الجذريين

$$م_1 م_2 = \frac{حـ}{أ} = \frac{ص_1^2 - نق^2}{س_1^2 - نق^2} \qquad (٣)$$

من (٢) ، (٣) نجد أن :

$$\frac{ص_1^2 - نق^2}{س_1^2 - نق^2} = -١$$

اذن $ص_1^2$ − $نق^2$ = − $س_1^2$ + $نق^2$

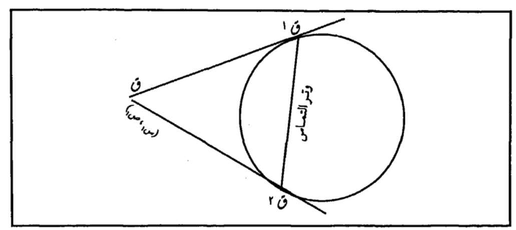
أي أن $س_1^2$ + $ص_1^2$ = ٢ $نق^2$

اذن المحل الهندسي هو الدائره = {(س ، ص) : س ٢ + ص ٢ = ٢ نق ٢}

أي أن المحل الهندسي للنقطة التي يمكن رسم مماسين متعامدين منها للدائرة

د = { (س ، ص) : س ^{٢} + ص ^{٢} = نق ^{٢} } هو أيضـا دائره مـركـزها نقـطة الأصل ونصف قطرها $\sqrt{٢}$ نق

(٢ – ١١) معادلة وتر التماس لنقطة معلومه بالنسبه لدائرة :



شكل (٢ – ١٥)

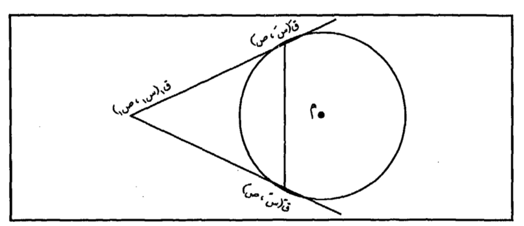
في البند السابق مباشره أثبتنا أنه يمكن رسم مماسين من نقطة ما خارج دائرة ما إلى الدائرة والمماسان يكون متساويان في الطول (يمكن إثبات ذلك بسهوله)

وأو ضحنا كيف يمكن إيجاد معادلتهما فإذا كان المماسان من ق يمسان الدائرة في ق $_{١}$ ، ق $_{٢}$ (شكل ٢ – ١٥)

فإذا الوتر ق $_{١}$ ق $_{٢}$ يعرف بوتر التماس لنقطة ق بالنسبه للدائرة .

تعريف :

وتر التماس « من نقطه ما ق خارج الدائرة د يمكن رسم مماسين للدائرة د في النقطتين ق $_{١}$ ، ق $_{٢}$ ويكون الوتر ق $_{١}$ ق $_{٢}$ هو وتر تماس النقطة ق بالنسبه للدائرة د»



شكل (٢ - ١٦)

ولإيجاد معادلة وتر التماس نفرض أن
النقطة ق (س$_1$ ، ص$_1$) رسم مماسان للدائرة
د = { (س ، ص) : س^2 + ص^2 + ٢ ل س + ٢ ك ص + جـ = ٠ }
فكانت نقطتا التماس هما قَ (سَ ، صَ) ، قً (سً ، صً)
ويكون قَ قً هو وتر التماس المطلوب
ولايجاد معادلة قَ قً فإن
معادله المماس عند قَ : س سَ + ص صَ + ل (س + سَ) + ك (ص + صَ) + جـ = ٠ (١)
ومعادلة المماس عند قً : س سً + ص صً + ل (س + سً) + ك (ص + صً) + جـ = ٠ (٢)
بما أن المماسان يتقاطعان في نقطة واحدة ق (س$_1$ ، ص$_1$)
اذن (س$_1$ ، ص$_1$) يحقق كلا من معادليتهما
من (١) نجد أن
سَ س$_1$ + صَ ص$_1$ + ل (س$_1$ + سَ) + ك (ص$_1$ + صَ) + جـ = ٠ (٣)
ومن (٢) نجد أن
سً س$_1$ + صً ص$_1$ + ل (س$_1$ + سً) + ك (ص$_1$ + صً) + جـ = ٠ (٤)
بمقارنة المعادلتين (٣) ، (٤) نجد أن :
س س$_1$ + ص ص$_1$ + ل (س + س$_1$) + ك (ص + ص$_1$) + جـ = ٠

وهي تمثل معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطتين قَ ، قً أي أنها معـادلة وتر التماس المطلوبة .

مثال (٢ - ١٤) :

أوجد معادلة وتر التماس للنقطة (- ٥ ، ٥) بالنسبة للدائرة

د = { (س ، ص) : $س^٢ + ص^٢ = ٥$ } ومن ذلك أوجد معـادلتي المماسين للدائرة من تلك النقطة .

الحــــل :

معادلة وتر التماس هي $س س_١ + ص ص_١ = ٥$

$-٥ س + ٥ ص = ٥$

$ص - س = ١$

إذن ص = ١ + س بالتعويض في معادلة الدائرة

$س^٢ + ص^٢ = ٥$ نحصل على

$س^٢ + (س + ١)^٢ = ٥$

$٢ س^٢ + ٢ س - ٤ = ٠$

$س^٢ + س - ٢ = ٠$

$(س + ٢)(س - ١) = ٠$

س = - ٢ أو س = ١

ص = - ١ أو ص = ٢

نقطتان التماس هما أ (١ ، ٢) ، ب (- ٢ ، - ١)

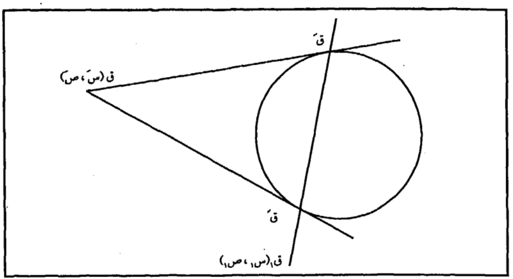
إذن معادلتا المماسين للدائرة عند نقطتي التماس هما

$س سَ + ص صَ = ٥$ أو $س سَ + ص صَ = ٥$

$سَ + ٢ صَ = ٥$ أو $-٢ سَ - صَ = ٥$

$سَ + ٢ صَ - ٥ = ٠$ ، $٢ سَ + صَ + ٥ = ٠$

(٢ – ١٢) معادلة الخط القطبي لنقطة معلومه بالنسبه لدائرة :



شكل (٢ – ١٦)

إذا رسم قاطع للدائرة من النقطة ق١ (س١ ، ص١) يقطعها في النقطتين قَ ، قً ورسم مماسين للدائرة عند قَ ، قً فانهما يتقاطعا في نقطة واحدة هي ق (سَ ، صَ) ويكون المحل الهندسي للنقطة ق (نقطة تلاقي المماسين) هو خط مستقيم لجميع أوضاع القاطع ق١ قَ قً ويسمى هذا المحل الهندسي بالخط القطبي للنقطة ق١ بالنسبه للدائره د

تعريف :

إذا رسم من النقطة ق١ مستقيما يقطع الدائره في النقطتين قَ ، قً فإن الخط القطبي للنقطة ق١ هو المحل الهندسي لنقطة تلاقي المماسين للدائرة د عند قَ ، قً وهو خط مستقيم ٠

وبمعنى آخر فاننا نستطيع القول بأن النقطة ق تتحرك بحيث أن وتر تماسها قَ قً يمر دائما بنقطه ثابته هي ق١ وتعرف النقطة ق١ بقطب الخط القطبي .

ولإيجاد معادلة الخط القطبي لنقطة ما بالنسبة لدائرة ما ، نفرض النقطة $\text{ق}_{١} \equiv (\text{س}_{١} ، \text{ص}_{١})$

والدائرة د = $\{(\text{س} ، \text{ص}) : \text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} + ٢\,\text{ل}\,\text{س} + ٢\,\text{ك}\,\text{ص} + \text{جـ} = ٠\}$

والمطلوب إيجاد معادلة الخط القطبي للنقطة $\text{ق}_{١}$ بالنسبة للدائرة د

نرسم المماسين عند قَ ، قً يتقاطعان في ق (سَ ، صَ) شكل (٢ – ١٦)

فيكون المطلوب هو إيجاد الحل الهندسي للنقطة ق (سَ ، صَ) بحيث يمر وتر الماس لها قَ قً دائما بالنقطة الثابتة $\text{ق}_{١} (\text{س}_{١} ، \text{ص}_{١})$

معادلة وتر التماس للنقطة ق (سَ ، صَ) بالنسبة للدائرة د هي :

$$\text{س}\,\text{سَ} + \text{ص}\,\text{صَ} + \text{ل}\,(\text{س} + \text{سَ}) + \text{ك}\,(\text{ص} + \text{صَ}) + \text{جـ} = ٠$$

هذا المستقيم (وتر التماس) يمر بالنقطة ق $(\text{س}_{١} ، \text{ص}_{١})$

إذن ق تحقق معادلتة وبالتالي فإن

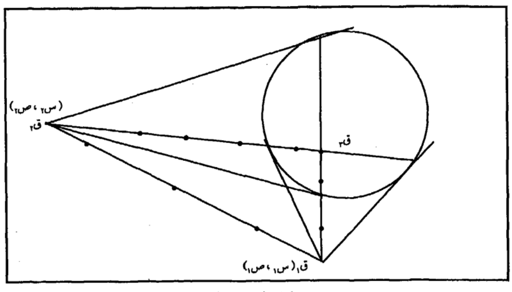
$$\text{س}_{١}\,\text{سَ} + \text{ص}_{١}\,\text{صَ} + \text{ل}\,(\text{س}_{١} + \text{سَ}) + \text{ك}\,(\text{ص}_{١} + \text{صَ})\ \text{جـ} = ٠$$

$$\text{س}_{١}\,\text{س} + \text{ص}_{١}\,\text{ص} + \text{ل}\,(\text{س} + \text{س}_{١}) + \text{ك}\,(\text{ص} + \text{ص}_{١}) + \text{جـ} = ٠$$

هي معادلة الخط القطبي للنقطة $\text{ق}_{١}$

***

(٢ – ١٣) النقطتان المترافقتان والمثلث المترافق الذاتي بالنسبة للدائرة



شكل (٢ – ١٧)

معادلة الخط القطبي للنقطة ق$_{١}$ (س$_{١}$ ، ص$_{١}$) هي

س س$_{١}$ + ص ص$_{١}$ + ل (س + س$_{١}$) + ك (ص + ص$_{١}$) + جـ = ٠

ومعادلة الخط القطبي للنقطة ق$_{٢}$ (س$_{٢}$ ، ص$_{٢}$) هي

س س$_{٢}$ + ص ص$_{٢}$ + ل (س + س$_{٢}$) + ك (ص + ص$_{٢}$) + جـ = ٠

فإذا مر الخط القطبي للنقطة ق$_{١}$ بالنقطة ق$_{٢}$

فإن الخط القطبي للنقطة ق$_{٢}$ يمر بالنقطة ق$_{١}$ (شكل ٢ – ١٧)

وهذا يؤدي إلى الشرط التالي :

$$س_1 س_2 + ص_1 ص_2 + ل(س_1 + س_2) + ك(ص_1 + ص_2) + جـ = 0 \quad (1)$$

ونقول عند ذلك أن النقطتين $ق_1$ ، $ق_2$ مترافقتين

تعريف :

$ق_1$ ، $ق_2$ نقطتان مترافقتان بالنسبة للدائرة د إذا وإذا فقط كان الخط للقطبي للنقطة $ق_1$ بالنسبة لدائره د يمر بالنقطة الثانية $ق_2$

وبالطبع فإن الخط القطبي للنقطة $ق_2$ بالنسبة للدائرة د أيضا يمر بالنقطه الأولى $ق_1$

كما أن الشرط (١) يسمى شرط ترافق النقطتين

$ق_1(س_1 ، ص_1)$ ، $ق_2(س_2 ، ص_2)$

كذلك ومن الشكل نفسه (٢ – ١٧)

الخط القطبي للنقطة $ق_3$ هو $\overline{ق_1 ق_2}$

وفي هذه الحالة فإن المثلث $ق_1 ق_2 ق_3$ يسمى بمثلث مترافق ذاتي بالنسبة للدائره د

تعريف :

يقال أن $ق_1 ق_2 ق_3$ مثلث مترافق ذاتي بالنسبة لدائرة ما د إذا وإذا فقط كان كل ضلع من أضلاعه هو الخط القطبي للرأس المقابل له بالنسبة للدائره د .

إيجاد قطب مستقيم بالنسبة للدائرة :

عرفنا فيما سبق أن الخط القطبي للنقطة $ق_1$ بالنسبة لدائرة ما د فإذا كان المستقيم ل هو الخط القطبي للنقط $ق_1$ فإننا نسمى النقطة $ق_1$ قطب المستقيم ل بالنسبة للدائرة د .

والمثال التالي يوضح كيفية تعيين قطب المستقيم بالنسبة للدائرة

أو بمعنى آخر تعيين النقطة إذا علم خطها القطبي بالنسبه للدائرة

مثال (٢ – ١٥)

أوجد قطب المستقيم $2\text{س} - 3\text{ص} + 4 = 0$

بالنسبه للدائرة $\text{د} = \{ (\text{س} ، \text{ص}) : \text{س}^2 + \text{ص}^2 - 7\text{س} + 5\text{ص} - 3 = 0 \}$

الحـــــل :

نفرض النقطه $\text{ق} \equiv (\text{س}_1 ، \text{ص}_1)$ هي قطب المستقيم المطلوب بالنسبه للدائره

فإن معادله الخط القطبي للنقطه ق بالنسبه للدائره د هي :

$$\text{س}\,\text{س}_1 + \text{ص}\,\text{ص}_1 - \frac{7}{2}(\text{س} + \text{س}_1) + \frac{5}{2}(\text{ص} + \text{ص}_1) - 3 = 0$$

$$(\text{س}_1 - \frac{7}{2})\text{س} + (\text{ص}_1 + \frac{5}{2})\text{ص} + (-\frac{7}{2}\text{س}_1 + \frac{5}{2}\text{ص}_1 - 3) = 0$$
(١)

ولكن معادله المستقيم هي $2\text{س} + 3\text{ص} + 4 = 0$ (٢)

بمقارنه معاملات (١) ، (٢)

$$\frac{\text{س}_1 - \frac{7}{2}}{2} = \frac{\text{ص}_1 + \frac{5}{2}}{3} = \frac{-\frac{7}{2}\text{س}_1 + \frac{5}{2}\text{ص}_1 - 3}{4}$$

$$4\text{س}_1 - 14 = -7\text{س}_1 + 5\text{ص}_1 - 6$$

$$11\text{س}_1 - 5\text{ص}_1 - 8 = 0 \quad (3)$$

، $4\text{ص}_1 + 10 = \frac{21}{2}\text{س}_1 - \frac{15}{2}\text{ص}_1 + 9$

$$21\text{س}_1 - 23\text{ص}_1 - 2 = 0 \quad (4)$$

بحل (٣) ، (٤) معا يمكننا الحصول على $\text{س}_1 ، \text{ص}_1$ إحداثيا القطب المطلوب

بضرب (٣) × ٢٣ ، (٤) × ٥

$٢٥٣س_١ - ١١٥ص_١ - ١٨٤ = ٠$

$١٠٥س_١ - ١١٥ص_١ - ١٠ = ٠$

بالطرح $١٤٨س_١ = ١٧٤$

$$س_١ = \frac{١٧٤}{١٤٨} = \frac{٨٧}{٧٤}$$

بالتعويض في (٣)

$$١١ \times \frac{٨٧}{٧٤} - ٥ص_١ - ٨ = ٠$$

$$٥ص_١ = \frac{٣٦٥}{٧٤} \Leftarrow ص_١ = \frac{٧٣}{٧٤}$$

القطب المطلوب هو النقطة $\left(\frac{٨٧}{٧٤} ، \frac{٧٣}{٧٤} \right)$

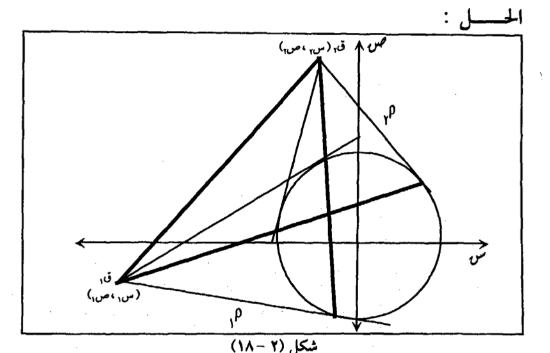
مثال (٢-١٦) :

إذا كان $ق_١$ ، $ق_٢$ نقطتان مترافقتان بالنسبه لدائرة ما د

فاثبت أن $|ق_١ ق_٢|^٢ = م_١^٢ + م_٢^٢$

حيث $م_١$ ، $م_٢$ هما طولا المماسين من $ق_١$ ، $ق_٢$ للدائره على الترتيب

الحـــــل :



شكل (٢ - ١٨)

انظر شكل (٢-١٨) من قانون البعد نحصل على

$$|ق_١ ق_٢| = |س_٢ - س_١|^٢ + |ص_٢ - ص_١|^٢ \qquad (١)$$

بفرض الدائره $د = \{ (س ، ص) : س^٢ + ص^٢ = نق^٢ \}$

شرط ترافق النقطتين $ق_١$ ، $ق_٢$ هو :

$$س_١ س_٢ + ص_١ ص_٢ = نق^٢ \qquad (٢)$$

$$|ق_١ ق_٢|^٢ = س_١^٢ + س_٢^٢ - ٢ س_١ س_٢ + ص_١^٢ + ص_٢^٢ - ٢ ص_١ ص_٢$$

$$= (س_١^٢ + ص_١^٢) + (س_٢^٢ + ص_٢^٢) - ٢ (س_١ س_٢ + ص_١ ص_٢) \qquad (٣)$$

$\rho_١$ هو طول المماس المرسوم من النقطة $(س_١ ، ص_١)$ للدائرة د

إذن $\rho_١^٢ = س_١^٢ + ص_١^٢ نق^٢$

، $\rho_٢$ هو طول المماس المرسوم من النقطة $(س_٢ ، ص_٢)$ للدائره د

$$\rho_٢^٢ = س_٢^٢ + ص_٢^٢ - نق^٢$$

إذن $\rho_١^٢ + \rho_٢^٢ = [(س_١^٢ + ص_١^٢) - نق^٢] + [(س_٢^٢ + ص_٢^٢) - نق ٢]$

$$= (س_١^٢ + ص_١^٢) + (س_٢^٢ + ص_٢^٢) - ٢ نق^٢ \qquad (٤)$$

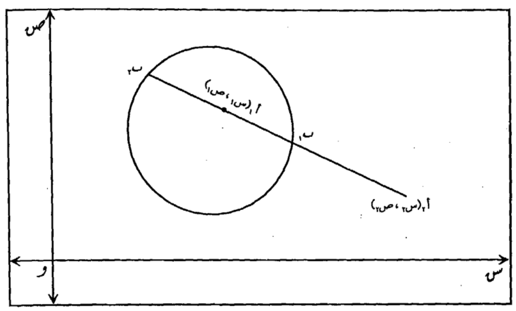
بالتعويض من (٢) في (٤)

$$\rho_١^٢ + \rho_١^٢ = (س_١^٢ + ص_١^٢) + (س_٢^٢ + ص_٢^٢) - ٢ (س_١ س_٢ + ص_١ ص_٢) \qquad (٥)$$

من (٣) ، (٥) نجد أن

$$|ق_١ ق_٢|^٢ = \rho_١^٢ + \rho_٢^٢$$ وهو المطلوب

(٢ – ١٤) معادلة يو خمشتال



شكل (٢ – ١٩)

إذا فرضنا أن لدينا الدائره

$$د = \{(س ، ص) : س^2 + ص^2 + 2ل\, س + 2ك\, ص + جـ = 0\}$$

، النقطه $أ_1$ $(س_1 ، ص_1)$ تقع داخل الدائرة

، النقطة $أ_2$ $(س_2 ، ص_2)$ تقع خارج الدائرة أنظر شكل (٢ – ١٩)

فإذا ارسم المستقيم $أ_1 أ_2$ ليقطع الدائره في النقطتين $ب_1$ ، $ب_2$

فإن $ب_1$ تقسم $أ_2 أ_1$ من الداخل بنسبة ما ولتكن $ق_1 : ق_2$

إحداثيات نقطة التقسيم $ب_1$ هي

$$\left(\frac{ق_1 س_1 + ق_2 س_2}{ق_1 + ق_2} \text{ ، } \frac{ق_1 ص_1 + ق_2 ص_2}{ق_1 + ق_2} \right)$$

بما أن $ب_1$ تقع على الدائره د إذن تحقق معادلتها

$$\left(\frac{ق_1 س_1 + ق_2 س_2}{ق_1 + ق_2} \right)^2 + \left(\frac{ق_1 ص_1 + ق_2 ص_2}{ق_1 + ق_2} \right)^2$$

$$+ 2 ل \left(\frac{ق_1 س_1 + ق_2 س_2}{ق_1 + ق_2} \right) + 2 ك \left(\frac{ق_1 ص_1 + ق_2 ص_2}{ق_1 + ق_2} \right) + جـ = ٠$$

وبالضرب × $(ق_1 + ق_2)^2$ نحصل على

$$(ق_1 س_1 + ق_2 س_2)^2 + (ق_1 ص_1 + ق_2 ص_2)^2$$

$$+ 2 ل (ق_1 + ق_2)(ق_1 س_1 + ق_2 س_2)$$

$$+ 2 ك (ق_1 + ق_2)(ق_1 ص_1 + ق_2 ص_2) + جـ (ق_1 + ق_2)^2$$

$$\Leftarrow \quad (س_1^2 + ص_1^2 + 2 ل س_1 + 2 ك ص_1 + جـ) ق_1^2$$

$$+ 2 [س_1 س_2 + ص_1 ص_2 + ل (س_1 + س_2)$$

$$+ ك (ص_1 + ص_2) + جـ] ق_1 ق_2$$

$$+ (س_2^2 + ص_2^2 + 2 ل س_2 + 2 ك ص_2 + جـ) ق_2^2 = ٠ \qquad (١)$$

وهذه معادلة من الدرجة الثانية في $\frac{ق_1}{ق_2}$ أو $\frac{ق_2}{ق_1}$

وهي تعطي جذرين هما نسبتي التقسيم إحداهما من الداخل

والأخرى من الخارج ويمكن تحويل هذه المعادله الى صورة أبسط للتعامل فإذا إعتبرنا

$$د_{(س_1 ، ص_1)} = س_1^2 + ص_1^2 + 2 ل س_1 + 2 ك ص_1 + جـ$$

$$د_{(س_2 ، ص_2)} = س_2^2 + ص_2^2 + 2 ل س_2 + 2 ك ص_2 + جـ$$

، م = س١ س٢ + ص١ ص٢ + ل (س١ + س٢) + ك (ص١ + ص٢) + جـ

فإن المعادلة (١) تصبح في الصورة

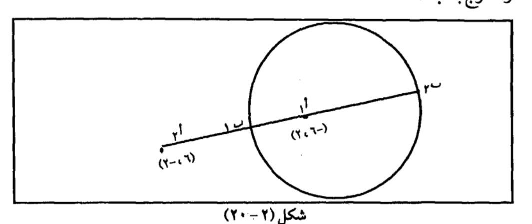
د (س١ ، ص١) ق١^٢ + ٢ م ق١ ق٢ + د (س١ ، ص١) ق١^٢ = ٠

وهذه هي معادلة يو خمشتال لنسبتي التقسيم

ومن هذه المعادلة الأخيرة فأننا نستطيع الحصول على النسبة التي ينقسم بها مستقيم ما ل بدائرة ما د من الداخل والخارج ولتوضيح أكثر إليك المثال التالي :

مثال (٢ - ١٧)

اثبت أن الدائرة د = {(س ، ص) : س^٢ + ص^٢ - ١٨ س - ٤ ص + ٤٠ = ٠ } تقسم المستقيم الواصل بين النقطتين (-٦ ، ٢) ، (٦ ، -٢) من الداخل والخارج بنسبه ٣ :١



شكل (٢ - ٢٠)

الحـــــل :

من شكل (٢ - ٢٠) نجد أن النقطة (- ٦ ، ٢) تقع داخل الدائرة

أما النقطة (٦ ، -٢) فتقع خارجها

ويكون د (س١ ، ص١) = ٣٦ + ٤ - ١٨ × ٦ - ٤ (- ٢) + ٤٠

= ٨٨ - ١٠٨ = - ٢٠ (١)

د (س$_{١}$ ، ص$_{١}$) = ٣٦ + ٤ − ١٨ (−٦) − ٤ × ٢ + ٤٠

= ٨٠ + ١٠٨ − ٨

= ١٨٠ (٢)

م = (−٦) ٦ + ٢ (−٢) + (−٩) (−٦ + ٦) + (−٢) (٢ − ٢) + ٤٠

= −٣٦ − ٤ + ٤٠ = −٤٠ + ٤٠ = ٠ (٣)

بالتعويض من (١) ، (٢) ، (٣) في معادلة يو خمشتال

١٨٠ ق$_{١}^{٢}$ + ٢ (٠) ق$_{١}$ ق$_{٢}$ + (− ٢٠) ق$_{٢}^{٢}$ = ٠

١٨٠ ق$_{١}^{٢}$ − ٢٠ ق$_{٢}^{٢}$ = ٠

٩ ق$_{١}^{٢}$ − ق$_{٢}^{٢}$ = ٠

$٩ \left(\frac{ق_{١}}{ق_{٢}}\right)^{٢} = ٠$

$\left(\frac{ق_{١}}{ق_{٢}}\right)^{٢} = \frac{١}{٩} \Leftarrow \frac{ق_{١}}{ق_{٢}} = \frac{١}{٣}$

إذن ق$_{٢}$: ق$_{١}$ = ٣ : ١ وهو المطلوب

***

تمارين (٢-٣)

(١) برهن أن المستقيم ٢ س + ص = ٤ مماس للدائرة

د = {(س ، ص) : س^{٢} + ص^{٢} + ٦ س − ١٠ ص + ٢٩ = ٠}

(٢) برهن ان المستقيم ٢ س − ٣ ص = ١٤ مماس مشترك للدائرتين

د$_{١}$ = {(س ، ص) : س^{٢} + ص^{٢} − ٤ س − ٢ ص − ٨ = ٠}

د$_{٢}$ = {(س ، ص) : س^{٢} + ص^{٢} − ١٠ س − ٦ ص + ٢١ = ٠}

(٣) أوجد معادلة وتر التماس للماسين المرسومين للدائرة

د = {(س ، ص) : س^{٢} + ص^{٢} − ٤ س − ٦ ص + ٣ = ٠}

من نقطة الأصل ومن ذلك برهن ان معادلتي المماسين هما

س^{٢} + ١٢ س ص + ٦ ص^{٢} = ٠

(٤) اذا كان وتر التماس للماسين المرسومين من نقطة ن للدائرة

د$_{١}$ = {(س ، ص) : س^{٢} + ص^{٢} = أ^{٢}} يمس دائما الدائرة

د$_{٢}$ = {(س ، ص) : س^{٢} + ص^{٢} − ٢ أ س = ٠}

برهن ان المحل الهندسي للنقطة ن هو منحني معادلتة ص^{٢} = أ(أ − ٢ س)

(٥) أوجد احداثيات نقط التماس للمماسان المرسومان من النقطة (٢ ، ٠)

للدائرة د = {(س ، ص) : س^{٢} + ص^{٢} − ٢ س + ٦ ص + ٥ = ٠}

(٦) برهن على ان زوج المماسات من النقطة (−١ ، ٣) الى الدائرة

د = {(س ، ص) : س^{٢} + ص^{٢} = ٥} متعامدان كل على الآخر .

(٧) عين معادلة زوج المماسات التي ترسم من نقطة الأصل الى الدائرة

د = {(س ، ص) : س^{٢} + ص^{٢} + ٨ س + ٦ ص + ٢١ = ٠}

(٨) إذا قطع الخط المستقيم الواصل بين النقطتين أ(− ٥ ، ٧) ، ب (٤ ، − ٥)

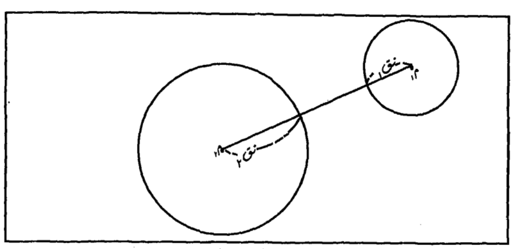
الدائرة د = {(س ، ص) : س^{٢} + ص^{٢} + س − ٢ ص − ٥ = ٠} في النقطتين جـ ، د فاوجد النسبتين أجـ : جـب ، أد : دب ثم أوجد إحداثيات النقطتين جـ ، د .

***

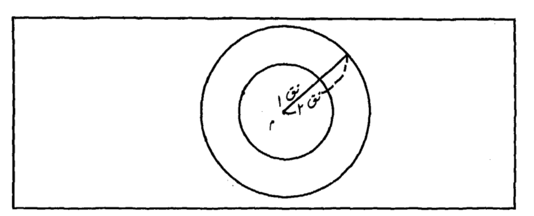
(٢ – ١٥) العلاقة بين دائرتين

إن تصورنا الهندسي للعلاقة بين دائرتين لا يخرج عن صور ثلاث كما يلي :

الصورة الأولى : الدائرتان متباعدتان



شكل (٢ – ٢١)



شكل (٢ – ٢٢)

إذا كانت الدائرتان هما

$$د_{١} = \{ (س ، ص) : س^{٢} + ص^{٢} + ٢ ل_{١} س + ٢ ك_{١} ص + جـ_{١} = ٠ \}$$

$$، د_{٢} = \{ (س ، ص) : س^{٢} + ص^{٢} + ٢ ل_{٢} س + ٢ ك_{٢} ص + جـ_{٢} = ٠ \}$$

فإن من الواضح من شكل (٢ - ٢١) أن الشرط الهندسي لتباعد الدائرتين (خارجيا) هو

$$|\text{م}_{1}\text{م}_{2}| > \text{نق}_{1} + \text{نق}_{2}$$

$$|\text{م}_{1}\text{م}_{2}|^{2} > (\text{نق}_{1} + \text{نق}_{2})^{2}$$

$$(\text{ل}_{1} - \text{ل}_{2})^{2} + (\text{ك}_{1} - \text{ك}_{2})^{2} > \text{نق}_{1}^{2} + \text{نق}_{2}^{2} + ٢\,\text{نق}_{1}\text{نق}_{2}$$

$$\text{ل}_{1}^{2} - ٢\,\text{ل}_{1}\text{ل}_{2} + \text{ل}_{2}^{2} + \text{ك}_{1}^{2} - ٢\,\text{ك}_{1}\text{ك}_{2} + \text{ك}_{2}^{2} > \text{نق}_{1}^{2} + \text{نق}_{2}^{2} + ٢\,\text{نق}_{1}\text{نق}_{2}$$

$$\text{ل}_{1}^{2} + \text{ل}_{2}^{2} + \text{ك}_{1}^{2} + \text{ك}_{2}^{2} - ٢(\text{ل}_{1}\text{ل}_{2} + \text{ك}_{1}\text{ك}_{2}) > \text{ل}_{1}^{2} + \text{ك}_{1}^{2} - \text{جـ}_{1}$$

$$+ \text{ل}_{2}^{2} + \text{ك}_{2}^{2} - \text{جـ}_{2} + ٢\sqrt{\text{ل}_{1}٢ + \text{ك}_{1}٢ - \text{جـ}_{1}}\ \sqrt{\text{ل}_{2}^{2} + \text{ك}_{2}^{2} - \text{جـ}_{2}}$$

$$-٢(\text{ل}_{1}\text{ل}_{2} + \text{ك}_{1}\text{ك}_{2}) > -(\text{جـ}_{1} + \text{جـ}_{2})$$

$$+ ٢\sqrt{\text{ل}_{1}^{2} + \text{ك}_{1}^{2} - \text{جـ}_{1}}\ \sqrt{\text{ل}_{2}^{2} + \text{ك}_{2}^{2} - \text{جـ}_{2}}$$

$$٢(\text{ل}_{1}\text{ل}_{2} + \text{ك}_{1}\text{ك}_{2}) < (\text{جـ}_{1} + \text{جـ}_{2})$$

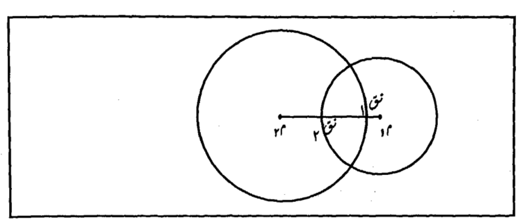
$$- \sqrt{(\text{ل}_{1}^{2} + \text{ك}_{1}^{2} - \text{حـ}_{1})(\text{ل}_{2}^{2} + \text{ك}_{2}^{2} - \text{حـ}_{2})}$$

$$\Leftarrow ٢\left[\text{ل}_{1}\text{ل}_{2} + \text{ك}_{1}\text{ك}_{2} + \sqrt{(\text{ل}_{1}^{2} + \text{ك}_{1}^{2} - \text{جـ}_{1})(\text{ل}_{2}^{2} + \text{ك}_{2}^{2} - \text{جـ}_{2})}\right]$$

$$< \text{جـ}_{1} + \text{جـ}_{2}$$

وهذا هو الشرط اللازم لتباعد الدائرتين د_{1} ، د_{2}

الصورة الثانية : الدائرتان متقاطعتان



شكل (٢ - ٢٣)

بالنظر الى شكل (٢ - ٢٣)

نجد أن الشرط الهندسي لتقاطع الدائرتان $د_1$ ، $د_2$ هو

$$|م_1 م_2| < نق_1 + نق_2$$

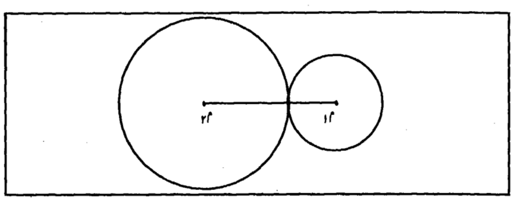
ومن السهل الحصول على شرط تقاطع الدائرتين بنفس الاسلوب المستخدم في إيجاد شرط التباعد ويكون

$$2\left[ل_1 ل_2 + ك_1 ك_2 + \sqrt{(ل_1 + ك_1 - جـ_1)(ل_2 + ك_2 - جـ_2)}\right]$$

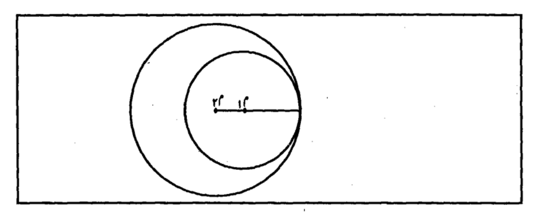
$$< جـ_1 + جـ_2$$

هو الشرط اللازم لتقاطع الدائرتين $د_1$ ، $د_2$

الصورة الثالثة : الدائرتان متماستان



شكل (٢ - ٢٤أ)



شكل (٢ - ٢٤ ب)

إن الشرط الهندسي لتماس الدائرتين $د_1$ ، $د_2$ من الخارج أو من الداخل شكل (٢ - ٢٤أ) ، شكل (٢ ـ ٢٤ ب) على الترتيب هو :

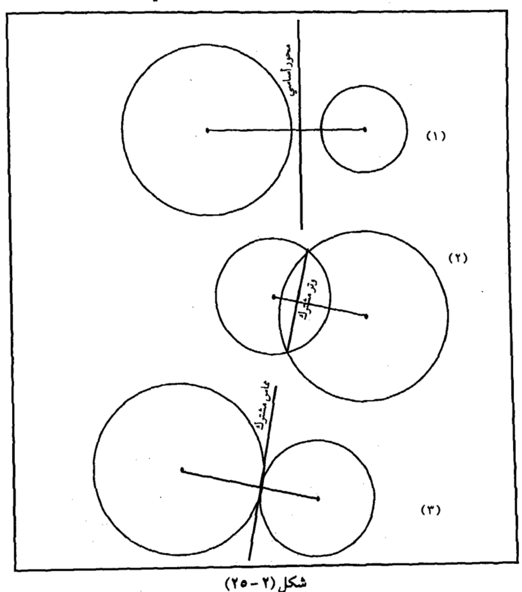
$$|م_1 م_2| = نق_1 \pm نق_2$$

وبنفس الاسلوب السابق في الصورة الأولى نجد أن الشرط اللازم لتماس الدائرتين د_1 ، د_2 من الخارج أو الداخل هو

$$٢\left[\text{ل}_1\text{ل}_2 + \text{ك}_1\text{ك}_2 \pm \sqrt{(\text{ل}_1^2 + \text{ك}_1^2 - \text{جـ}_1)(\text{ل}_2^2 + \text{ك}_2^2 - \text{جـ}_2)}\right]$$

$$= \text{جـ}_1 + \text{جـ}_2$$

نتيجة : الوتر المشترك – المماس المشترك – المحور الأساسي



شكل (٢ – ٢٥)

لتكن $د_١$ ، $د_٢$ دائرتان هما

$د_١ = \{ (س ، ص) : س^٢ + ص^٢ + ٢ ل_١ س + ٢ ك_١ ص + جـ_١ = ٠ \}$

، $د_٢ = \{ (س ، ص) : س^٢ + ص^٢ + ٢ ل_٢ س + ٢ ك_٢ ص + جـ_٢ = ٠ \}$

فإذا كانت $ي_١$ هي معادلة $د_١$ و $ي_٢$ هي معادلة $د_٢$

فإن $ي_١ - ي_٢ = ٢ (ل_١ - ل_٢) س + ٢ (ك_١ - ك_٢) ص + (جـ_١ - جـ_٢) = ٠$

وهذه معـادلة من الدرجه الأولى في كل من س ، ص وبالتالي فـهى تمثل خط مستقيم وهنا نتعرض للصور الثلاث السابقة

وبالرجوع الى شكل (٢ - ٢٦) نجد أن في :

(١) الدائرتان متباعدتان وتكون المعادلة $(ي_١ - ي_٢ = ٠)$

هي معادلة المحور الاساسي

(٢) الدائرتان متقاطعتان وتكون المعادلة $(ي_١ - ي_٢ = ٠)$

هي معادلة الوتر المشترك

(٣) الدائرتان متماستان وتكون المعادلة $(ي_١ - ي_٢ = ٠)$

هي معادلة المماس المشترك

ملاحظة هامة : المحور الاساسي أو الوتر المشترك أو المماس المشترك

عمودي على خط المركزين

ففي الدائرتين $د_١$ ، $د_٢$ ميل خط المركزين = $\left(\frac{ك_١ - ك_٢}{ل_١ - ل_٢} \right)$

فيكون ميل أي من المحور الاساسي أو الوتر المشترك أو المماس المشترك

(على حسب صوره العلاقة بين الدائرتين) $= - \left(\frac{ل_1 - ل_2}{ك_1 - ك_2} \right)$

والآن نأتي الى مزيد من التفاصيل لدراسة الدائرتين المتقاطعتان ونبدآها بكيفية تعيين نقطتي تقاطع الدائرتين $د_1$ ،$د_2$

فبفرض تساوي معاملي س ٢ ، ص٢ في كل من $ي_1$ ،$ي_2$

($ي_1$ ،$ي_2$ هما معادلتي $د_1$ ،$د_2$ على الترتيب)

فكما ذكرنا سابقا $ي_1 - ي_2 = ٠$ تعطي معادلة خط مستقيم هو في حالة التقاطع الوتر المشترك للدائرتين فإذا أمكن حل معادلة هذا الوتر المشترك مع إحدى الدائرتين فأننا نحصل على نقطتين هما نقطتي تقاطع الدائرتين وسنعرض أسلوب الحل من خلال المثال التالي

مثال (٢ - ١٨) :

أوجد نقطتي تقاطع الدائرتين

$د_1 = \{ (س ، ص) : س^٢ + ص^٢ - ٤ س - ٤ ص + ٤ = ٠ \}$ ،

$د_2 = \{ (س ، ص) = س^٢ + ص^٢ = ٤ \}$

الحـــــل :

لايجاد $ي_1 - ي_2 = ٠$

$س^٢ + ص^٢ - ٤ س - ٤ ص + ٤ = ٠$

$س^٢ + ص^٢ - ٤ = ٠$

$-٤ س - ٤ ص + ٨ = ٠$

$س + ص - ٢ = ٠$ وهي معادلة الوتر المشترك للدائرتين

$س = ٢ - ص$

بالتعويض في $ي_٢$ نحصل على

$(٢ - ص)^٢ + ص^٢ = ٤$

$ص^٢ - ٤ ص + ٤ + ص^٢ = ٤$

$٢ ص^٢ - ٤ ص = ٠$

$٢ ص (ص - ٢) = ٠$

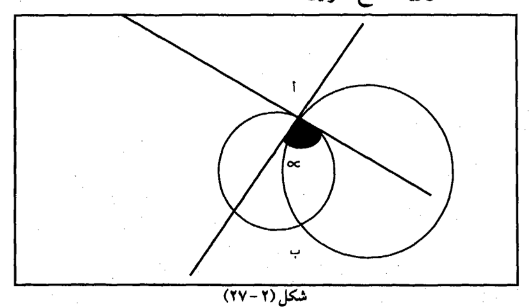
$ص = ٠$ أو $ص = ٢$

$س = ٢$ أو $س = ٠$

اذن نقطتي التقاطع (٢ ، ٠) ، (٠ ، ٢)

أي أن $د_١ \cap د_٢ = \{(٢ ، ٠) ، (٠ ، ٢)\}$

(٢ - ١٦) زاوية تقاطع دائرتين :



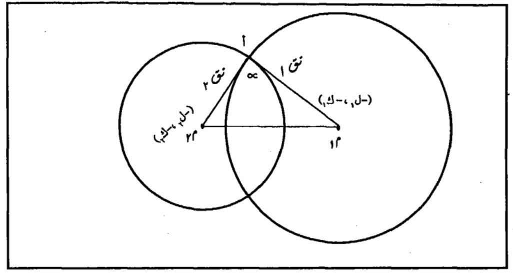
شكل (٢ - ٢٧)

إذا تقاطعت دائرتان $د_١$ ، $د_٢$ في نقطتين مثل أ ، ب شكل (٢ - ٢٧) ورسمنا عند إحدى نقطتي التقاطع مماسا لكل من الدائرتين فإن الزاوية الناتجة (بين المماسين) عند أي من نقطتي التقاطع تسمى بزاوية تقاطع الدائرتين $د_١$ ، $د_٢$

تقاطع دائرتين على التعامد :

تعريف :

تتقاطع الدائرتان $د_١$ $د_٢$ على التعامد إذا وإذا فقط كان مقياس زاويه تقاطعهما = ٩٠°



شكل (٢ - ٢٨)

فالدائرتان $د_١ = \{ (س ، ص) : س^٢ + ص^٢ + ٢ ل_١ س + ك_١ ص + جـ_١ = ٠ \}$

، $د_٢ = \{ (س ، ص) : س^٢ + ص^٢ + ٢ ل_٢ س + ٢ ك_٢ ص + جـ_٢ = ٠ \}$

متقاطعتان على التعامد إذا كانت الزاوية ∝ (زاوية التقاطع للدائرتين) قائمة شكل (٢ - ٢٨)

فإذا كان $م_١$ هو مركز الدائرة الأولى ($- ل_١$ ، $- ك_١$)

، $م_2$ هو مركز الدائرة الثانية $(-ل_2 ، -ك_2)$

اذن المماس للدائرة $د_1$ عند النقطة أ يمر بالنقطة $م_2$ (مركز الثانية)

والمماس للدائرة $د_2$ عند النقطة أ يمر بالنقطة $م_1$ (مركز الأولى)

أي أن في حالة تقاطع دائرتين على التعامد تكون الزاوية بين المماسين عند النقطة أ هي نفس الزاوية بين نصف القطرين عند النقطة أ

اذن المثلث $م_1 أ م_2$ قائم الزاوية

$$|م_1 م_2|^2 = نق_1^2 + نق_2^2$$

$$(ل_1 - ل_2)^2 + (ك_1 - ك_2)^2 = ل_1^2 + ك_1^2 - جـ_1 + ل_2^2 + ك_2^2 - جـ_2$$

اذن $2 (ل_1 ل_2 + ك_1 ك_2) = جـ_1 + جـ_2$

وهو شرط تقاطع الدائرتين $د_1$ ، $د_2$ على التعامد

مثال (٢ - ١٩) :

أثبت أن الدائرتين

$$د_1 = \{ (س ، ص) : س^2 + ص^2 - ٦ س - ١٠ ص + ٢٥ = ٠ \}$$

$$، د_2 = \{ س^2 + ص^2 + ٢ س - ٤ ص - ١١ = ٠ \}$$

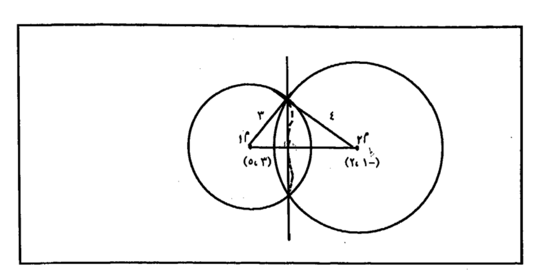
متقاطعتان على التعامد وأوجد معادلة الوتر المشترك لهما .

الحـــل :

الدائرة الأولى :

المركز (٣ ، ٥)

$نق = \sqrt{٩ + ٢٥ - ٢٥} = ٣$



شكل (٢ -٢٩)

الدائرة الثانية :

المركز (-١ ، ٢)

نق$_٢$ = $\sqrt{١ + ٤ + ١١}$ = ٤

|م$_١$م$_٢$| = $\sqrt{(-١-٣)^٢ + (٢ - ٥)^٢}$

= $\sqrt{١٦ + ٩}$ = $\sqrt{٢٥}$ = ٥

|م$_١$م$_٢$|^٢ = ٢٥

نق$_١^٢$ + نق$_٢^٢$ = ٩ + ١٦ = ٢٥

|م$_١$م$_٢$|^٢ = نق$_١^٢$ + نق$_٢^٢$

إذن الدائرتان متقاطعتان على التعامد وهو المطلوب

ولايجاد معادلة الوتر المشترك نوجد د$_١$ - د$_٢$

$س^٢ + ص^٢ - ٦ س - ١٠ ص + ٢٥ = ٠$

$س^٢ + ص^٢ + ٢ س - ٤ ص - ١١ = ٠$ ،   وبالطرح نحصل على

$- ٨ س - ٦ ص + ٣٦ = ٠$

$٤ س + ٣ ص - ١٨ = ٠$

مثال (٢ - ٢٠) :

بفرض الدائرة $د_١$ = { (س ، ص) : $س^٢ + ص^٢ + ٨ س - ٤ ص - ٤٤ = ٠$ }

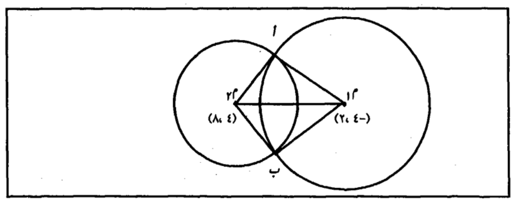
والدائرة $د_٢$ مركزها (٤ ، ٨)

فإذا علمت أن $د_١$ ، $د_٢$ تتقاطعان على التعامد فأوجد نصف قطر الدائره $د_٢$

وإذا كانت أ ، ب هما نقطتا تقاطع الدائرتين فأوجد معادلة الدائره التي تمر بالنقط الأربع

أ ، $م_١$ ، ب ، $م_٢$ على الترتيب

($م_١$ ، $م_٢$ هما مركز الدائرتين $د_١$ ، $د_٢$)



شكل (٢ - ٣٠)

الحل :

الدائره الاولى $د_١$:

مركزها م ≡ (- ٤ ، ٢) ، ونصف قطرها = $\sqrt{١٦ + ٤ + ٤٤} = ٨$

الدائرة الثانية $د_٢$:

مركزها $م_٢ \equiv (٤ ، ٨)$ ونصف قطرها نق

بما ان الدائرتان متقاطعتان على التعامد

اذن $|م_١ م_٢|^٢ = نق_١^٢ + نق_٢^٢$

$(-٤ - ٤)^٢ + (٢ - ٨)^٢ = ٦٤ + نق^٢$

$٦٤ + ٣٦ = ٦٤ + نق^٢$

اذن $نق^٢ = ٣٦ \Leftarrow نق = ٦$

المطلوب ثانيا : إيجاد معادلة الدائرة التي تمر بالنقط الأربع أ ، $م_١$ ، ب ، $م_٢$

بما أن أ قائمة اذن $م_١ م_٢$ قطر في الدائرة أي إن معادلة الدائرة هي

$(س + ٤) (س - ٤) + (ص - ٢) (ص - ٨) = ٠$

$س^٢ + ص^٢ - ١٠ ص + ٣٢ = ٠$

(٢ - ١٧) المعادلة العامة لعائلة الدوائر التي تمر بنقطة تقاطع دائرتين

إذا كانت $د_١ = \{(س ، ص) : س^٢ + ص^٢ + ٢ ل_١ س + ٢ ك_١ ص + جـ_١ = ٠\}$

، $د_٢ = \{(س ، ص) : س^٢ + ص^٢ + ٢ ل_٢ س + ٢ ك_٢ ص + جـ_٢ = ٠\}$

متقاطعتان

فإن المعادلة $س^٢ + ص^٢ + ٢ل_١ س + ٢ ك_١ ص + جـ_١$

$+ ك (س^٢ + ص^٢ + ٢ ل_٢ س + ٢ ك_٢ ص + جـ_٢) = ٠$ (١)

تمثل عائلة الدوائر التي تمر بنقطتي التقاطع للدائرتين

ولجميع قيم ك الحقيقية فإن المعادلة تعطي دائرة عدا حالة واحدة وهي بالطبع إذا كانت ك = - ١ وفي هذه الحالة فإن المعادلة الناتجة تصبح معادلة خط مستقيم هو وتر التقاطع للدائرتين .

مثال (٢ - ٢٢) :

أوجد معادله الدائره التي تمر بنقطه تقاطع الدائرتين

$د_{١}$ = { (س ،ص) : $س^{٢}$ + $ص^{٢}$ –س–ص–٢ = ٠ }

$د_{٢}$ = { (س ،ص) : $س^{٢}$ + $ص^{٢}$ + ٤ س - ٤ ص - ٨ = ٠ }

وتمر بالنقطه (٣ ، ١)

الحـــــل :

معادله أي دائره تمر بنقطه تقاطع الدائرتين

$س^{٢}$ + $ص^{٢}$ – س – ص – ٢ + ك ($س^{٢}$ + $ص^{٢}$ + ٤ س – ٤ ص – ٨) = ٠

(١)

بما أن النقطه (٣ ، ١) تقع على الدائرة اذن تحقق معادلتها

بالتعويض عن النقطة (٣ ، ١) في (١) نحصل على

٩ + ١ –٣– ١ – ٢ + ك (٩+ ١ +١٢ – ٤ –٨) = ٠

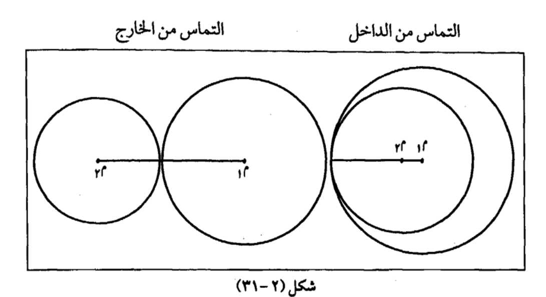
٤ + ك (١٠) = ٠

١٠ ك = – ٤ ⇐ ك = $-\frac{٢}{٥}$

بالتعويض عن ك في (١) تنتج معادله الدائرة وهي

٣ $س^{٢}$ + ٣ $ص^{٢}$ – ١٣ س + ٣ ص + ٦ = ٠

(٢ – ١٨) نقطة التماس ومعادلة المماس المشترك



شكل (٢ – ٣١)

لتعيين نقطة التماس من الداخل : تعيين النقطة التي تقسم $م_1 م_2$ من الخارج بنسبه $نق_1 : نق_2$

ولتعيين نقطة التماس من الخارج : تعيين النقطة التي تقسم $م_1 م_2$ من الداخل بنسبة $نق_1 : نق_2$

كما يمكننا إيجاد معادلة التماس للدائرتين عند نقطة التماس باستخدام نقطة التماس والميل الذي يمكن ايجاده بعد ايجاد ميل خط المركزين والاستفادة بالعلاقة الهندسية :

(خط المركزين عمودي على التماس المشترك للدائرتين)

فإذا كان ميل خط المركزين م فان ميل المماس المشترك = $-\frac{1}{م}$

واذا فرضنا ان نقطة التماس هي $(س_1 ، ص_1)$

تكون معادلة المماس المشترك هي :

$$ص - ص_1 = -\frac{1}{م} (س - س_1)$$

مثال (٢ - ٢٣) :

اثبت أن الدائرتين $س^٢ + ص^٢ - ٦ س - ٨ ص + ٩ = ٠$

، $س^٢ + ص^٢ = ١$ متمــاسان من الخارج وأوجد نقطة التماس

ومعادلة المماس المشترك لهما عند نقطه التماس .

الحـــل :

الدائرة الأولى $س^٢ + ص^٢ - ٦ س - ٨ ص + ٩ = ٠$

مركزها $م_١ = (٣ ، ٤)$

ونصف قطرها $نق_١ = \sqrt{٩ + ١٦ - ٩} = ٤$

الدائرة الثانية $س^٢ + ص^٢ = ١$

مركزها $م_٢ = (٠ ، ٠)$

ونصف قطرها $نق_٢ = ١$

اذن طول خط المركزين $|م_١ م_٢| = \sqrt{(٣ - ٠)^٢ + (٤ - ٠)^٢}$

$= \sqrt{٩ + ١٦} = \sqrt{٢٥} = ٥$

$نق_١ + نق_٢ = ٤ + ١ = ٥$

اذن $|م_١ م_٢| = نق_١ + نق_٢$

اذن الدائرتين متماستين من الخارج في نقطة أ

أ تقسم $م_١ م_٢$ من الداخل بنسبة ٤ : ١

س : ٣ ‏ ‏ ٠ ‏ ‏ ‏ ‏ ص : ٤ ‏ ‏ ٠

٤ ‏ ‏ ١ ‏ ‏ ‏ ‏ ٤ ‏ ‏ ١

$\text{س} = \frac{٤ \times ٠ + ٣ \times ١}{٥}$ ‏ ‏ ‏ ‏ $\text{ص} = \frac{٤ \times ٠ + ١ \times ٤}{٥}$

$\text{س} = \frac{٣}{٥}$ ‏ ‏ ‏ ‏ $\text{ص} = \frac{٤}{٥}$

اذن احداثيات نقطة التماس هي $\left(\frac{٣}{٥} ، \frac{٤}{٥} \right)$

ميل خط المركزين $= \frac{٤ - ٠}{٣ - ٠} = \frac{٤}{٣}$

اذن معادلة المماس المشترك عند نقطة التماس هي :

$\left(\text{ص} - \frac{٤}{٥} \right) = - \frac{٣}{٤} \left(\text{س} - \frac{٣}{٥} \right)$

اذن $\text{ص} - \frac{٤}{٥} = \frac{٣}{٤} \text{س} + \frac{٩}{٢٠}$

$٢٠ \text{ص} - ١٦ = - ١٥ \text{س} + ٩$

اذن $٢٠ \text{ص} + ١٥ \text{س} - ٢٥ = ٠$

$٤ \text{ص} + ٣ \text{س} - ٥ = ٠$

(يمكن الحصول على المعادلة أيضاً من طرح المعادلة (٢) من المعادلة (١) كما أوضحنا مسبقاً) .

تمارين (٢ – ٤)

(١) أوجد معـادلتي الدائرتـين اللتـين مـركز كل منهـمـا (٢ ، – ٣) وتمسان الدائرة
س^{٢} + ص^{٢} – ٨ س + ١٠ ص + ٥ = ٠

(٢) أوجد نقطتي تقاطع الدائرتين

س^{٢} + ص^{٢} – ٤ س + ٦ ص – ١٢ = ٠

س^{٢} + ص^{٢} – ٢ = ٠

وأوجد معادلة الوتر المشترك لهما .

(٣) اثبت أن الدائرتين د$_{١}$ = {(س ، ص) : ٢ س^{٢} + ٢ ص^{٢} – ٧ س + ٥ = ٠}

، د$_{٢}$ = {(س ، ص) : س^{٢} + ص^{٢} – ٦ س + ٤ ص + ٨ = ٠ }

متقاطعتان على المتعامد وأوجد نقطتي التقاطع ومعادلة الوتر المشترك لهما ٠

(٤) اثبت أن الدائرتين

د$_{١}$ = {(س ، ص) : س^{٢} + ص^{٢} + ٤ س – ١٠ ص + ١٣ = ٠ }

، د$_{٢}$ = { (س ، ص) : س^{٢} + ص^{٢} – ١٢ س – ٢٢ ص + ١٢١ = ٠ }

متماستان من الخارج وأوجد كلا من نقطة التماس ومعادلة المماس المشترك لهما
عند نقطة التماس ٠

(٥) دائره تمر بالنقطة (أ ، ب) وتقطع الدائره س^{٢} + ص^{٢} = نق^{٢} على التـعـامـد
برهن على أن المحل الهندسي لمركز الدائره هو خط مستقيم معادلته

٢ أ س + ٢ ب ص = أ^{٢} + ب^{٢} + نق^{٢}

(٦) أوجد معادلة الدائرة التي تمر بنقطتي تقاطع الدائرتين

د$_{١}$ = {(س ، ص) : س^{٢} + ص^{٢} – ٦ س + ٢ ص + ٤ = ٠ } ،

د$_{٢}$ = {(س ، ص) : س^{٢} + ص^{٢} – ٢ س + ٤ ص – ٦ = ٠ }

ويقع مركزها على المستقيم ص = س

***

الباب الثالث

تحويل الإحداثيات ـ القطع المكافئ

***

الباب الثالث

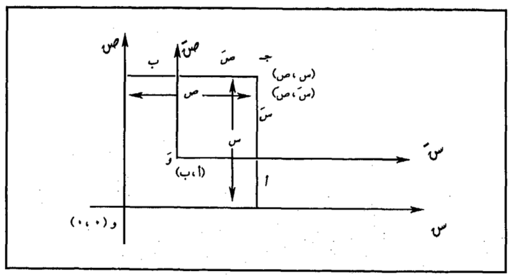
تحويل الإحداثيات ـ القطع المكافئ

غالباً ما نحتاج إلى وضع معادلة منحنى ما في الصورة القياسية طبقاً لأسس تحكم هذه الصورة القياسية أو وضع المعادلة في صورة مبسطة يسهل التعامل معها ، ويمكننا تحقيق ذلك بتغيير الإحداثيات الأصلية وهو ما يعرف بتحويل الإحداثيات . وهناك طريقتان رئيسيتان لتحويل الإحداثيات الأولى تعرف بنقل المحاور والثانية تعرف بدوران المحاور . كما يمكننا أن نطبق الطريقتين معاً .

وقد رأينا ان نستعرض موضوع تحويل الإحداثيات قبل أن نتطرق لموضوع القطوع المخروطية نظراً لحاجتنا إليه في دراسة هذه القطوع .

(٣ ـ ١) نقل المحاور

ويتم نقل محوري الإحداثيات موازية لنفسها بنقل نقطة الأصل إلى نقطة إختيارية جديدة أو بعبارة أخرى تغيير نقطة الأصل بنقطة اختيارية جديدة بدون تغيير اتجاه المحورين .



شكل (٣-١)

إذا نقلنا نقطة الأصل و إلى نقطة اختيارية جديدة وَ حيث احداثيات وَ هي (أ ، ب) مع بقاء المحورين موازيين للمحورين الأصليين (أنظر شكل «٣ ـ ١») .

وبما أن احداثيات النقطة من المستوى يعتمد على وضع محوري الإحداثيات فإن النقطة حـ في شكل (٣ ـ ١) التي احداثياها (س ، ص) بالنسبة إلى المحورين وس ، وص يكون احداثياها (سَ ، صَ) بالنسبة إلى المحورين وسَ ، وصَ .

بحيث س = سَ + أ
ص = صَ + ب (١)

هذه المعادلات تعطي إحداثيا النقطة حـ بالنسبة للمحورين وس ، وص بدلالة إحداثياها بالنسبة للمحورين وسَ ، وصَ .

فإذا عوضنا بدلا من س ، ص بالقيم سَ + أ ، صَ + ب على الترتيب في معادلة أي منحن فإننا نحصل على معادلة نفس المنحنى لكنها مسندة إلى المحورين الجديدين وسَ ، وصَ باعتبار نقطة الأصل الجديدة وَ إحداثياها (أ ، ب) .

تعرف مجموعة المعادلات (١) بمعادلات انتقال المحورين من الإحداثيات (سَ ، صَ) إلى الإحداثيات (س ، ص) كما تعرف مجموعة المعادلات التالية بمعادلات انتقال المحورين من الإحداثيات (س ، ص) إلى الإحداثيات (سَ ، صَ)

سَ = س − أ
صَ = ص − ب (١َ)

مثال (٣ ـ ١) :

أوجد معادلة المنحنى ٢ س^{٢} + ٣ ص^{٢} − ٨ س + ٦ ص = ٧

منسوبة إلى محورين يوازيان المحورين الأصلين مع نقل نقطة الأصل إلى النقطة (٢ ، −١) .

الحـــل :

بوضع س = سَ + ٢ ، ص = صَ − ١

اذن ٢ (سَ + ٢)^{٢} + ٣ (صَ − ١)^{٢} − ٨ (سَ + ٢) + ٦ (صَ − ١) = ٧

٢ (سَ^{٢} + ٤ سَ + ٤) + ٣ (صَ^{٢} − ٢ صَ + ١) − ٨ (سَ + ٢) + ٦ (صَ − ١) = ٧

٢ سَ^{٢} + ٨ سَ + ٨ + ٣ صَ^{٢} − ٦ صَ + ٣ − ٨ سَ − ١٦ + ٦ صَ − ٦ − ٧ = ٠

اذن ٢ سَ^{٢} + ٣ صَ^{٢} = ١٨

بالقسمة على ١٨

$$\frac{\text{سَ}^{٢}}{٩} + \frac{\text{صَ}^{٢}}{٦} = ١$$

والصورة السابقة هي الصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص بحيث الاحداثيات الجديدة هي لمركزه (٠ ، ٠) أي (٢ ، − ١) من الإحداثيات الأصلية (وسنوضح ذلك بالتفصيل عند دراستنا للقطع الناقص)

مثال (٣ ـ ٢) :

إذا اعتبرنا معادلة الدائرة

س^{٢} + ص^{٢} + ٢ ل س + ٢ ك ص + حـ = ٠

واستخدمنا إكمال المربع

فإن (س^{٢} + ٢ ل س + ل^{٢}) − ل^{٢} + (ص^{٢} + ٢ ك ص + ك^{٢}) − ك^{٢} + حـ = ٠

$\Leftarrow$ (س + ل)^{٢} + (ص + ك)^{٢} = ل^{٢} + ك^{٢} − حـ = نق^{٢}

وبنقل المحاور إلى النقطة (−ل ، −ك) مركز الدائرة تصبح المعادلة

$$(س\acute{} - ل + ل)^2 + (ص\acute{} - ك + ك)^2 = نق^2$$

$$س\acute{}^2 + ص\acute{}^2 = نق^2$$

وواضح أن هذه معادلة دائرة إحداثيا مركزها نقطة الأصل (لأننا نقلنا نقطة الأصل والمحاور الجديدة إلى النقطة (-ل ، -ك) وأصبحت (٠ ، ٠) حسب الإحداثيات الجديدة) .

ومن المثالين السابقين تتضح أهمية نقل المحاور لتبسيط صوره المعادلة لانه بإستخدام الإنتقال يمكننا حذف الحدود من الدرجة الأولى في معادلة الدرجة الثانية وذلك بإكمال المربع .

حيث في المثال الأول إستطعنا الوصول بصورة القطع الناقص

$$٢ س^2 + ٣ ص^2 - ٨ ص + ٦ ص = ٧$$

إلى الصورة القياسية

$$\frac{س\acute{}^2}{٩} + \frac{ص\acute{}^2}{٦} = ١$$

وأيضا في المثال الثاني استطعنا تغيير صورة الدائرة

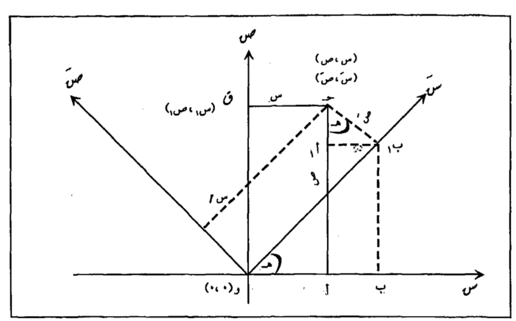
$$من\ س^2 + ص^2 + ٢ ل س + ٢ ك ص + حـ = ٠$$

إلى صورة أبسط وهي :

$$س\acute{}^2 + ص\acute{}^2 = نق^2$$

(٣ ـ ٢) : دوران المحاور

كما أوضحنا قبل ذلك فقد أمكننا نقل نقطة الأصل إلى نقطة اختيارية جديدة وبالتالي فتنتقل المحاور موازية لنفسها وسنوضح هنا كيف يمكننا إدارة المحاور بزاوية اختيارية هـ



شكل (٣ - ٢)

فإذا دارت المحاور بزاوية هـ في الاتجاه الموجب للمحور وس مع بقاء نقطة الأصل ثابتة من الشكل الموضح (٣ ـ ٢) نجد أن النقطة حـ التي إحداثياها (س ، ص) بالنسبة إلى المحورين وس ، وص لها الإحداثيات (سَ ، صَ) بالنسبة إلى المحورين وسَ ، وصَ

إذن س = |و ب| - |ب أ|

= |و ب| - |ب$_1$ أ$_1$|

= سَ حتا هـ - صَ حا هـ

، ص = |أ أ$_1$| + |أ$_1$ حـ|

= |ب ب$_1$| + |أ$_1$ حـ|

= سَ حا هـ + صَ حتا هـ

أي أن

س = سَ حتا هـ - صَ حا هـ

ص = سَ حا هـ + صَ حتا هـ (٢)

وتعرف هذه المجموعة من المعادلات بمعادلات دوران المحاور حول نقطة الأصل من الاحداثيات (سَ ، صَ) إلى الاحداثيات (س ، ص) بزاوية مقدارها هـ والتي تعرف بزاوية الدوران في الاتجاه الموجب للمحور وس .

ويمكن وضع مجموعة المعادلات (٢) على صورة معادلة مصفوفية

أي أن
$$\begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{حتاهـ} & -\text{حاهـ} \\ \text{حاهـ} & \text{حتاهـ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{سَ} \\ \text{صَ} \end{bmatrix} \qquad (٣)$$

وتعرف المصفوفة $\text{د} = \begin{bmatrix} \text{حتاهـ} & -\text{حاهـ} \\ \text{جاهـ} & \text{حتاهـ} \end{bmatrix}$ بمصفوفة الدوران

من الإحداثيات (سَ ، صَ) إلى الإحداثيات (س ، ص) ومن خواص هذه المصفوفة أنها غير شاذة أي قابلة للانعكاس ومعكوس هذه المصفوفة هو المصفوفة د^{-1}

وتعرف هذه المصفوفة بمصفوفة الدوران من الإحداثيات (س ، ص) إلى الإحداثيات (سَ ، صَ) . وبالتالي فإنه يمكن تكوين معادلات الدوران حول نقطة الأصل من الإحداثيات (س ، ص) إلى الاحداثيات (سَ ، صَ) على النحو التالي :

$$\begin{bmatrix} \text{سَ} \\ \text{صَ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{حتاهـ} & -\text{حاهـ} \\ \text{حاهـ} & \text{حتاهـ} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \text{سَ} \\ \text{صَ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{حتاهـ} & \text{حاهـ} \\ -\text{حاهـ} & \text{حتاهـ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{سَ} &= \text{س حتا هـ} + \text{ص حا هـ} \\ \text{صَ} &= -\text{س حا هـ} + \text{ص حتا هـ} \end{aligned} \qquad (٤)$$

تمثل (٤) مجموعة معادلات الدوران من الإحداثيات (س ، ص) إلى الإحداثيات (سَ ، صَ) .

(٣ ـ ٣) دوران مع انتقال

يتم في هذا الجزء تغيير اتجاهي المحورين ونقطة الأصل معا

إذا نقلنا نقطة الأصل إلى النقطة (أ ، ب) ونقلت المحاور موازية لنفسها ثم دار المحوران بزاوية هـ وطبقنا الحالتين السابقتين معا فإننا يمكن أن نستنتج أن النقطة جـ في شكل (٣ ـ ٣) يكون لها ثلاثة إحداثيات مختلفة بالنسبة لنظم المحاور الثلاثة

(وس ، وص) ، (وَسَ ، وَصَ) ، (وَسً ، وَصً)

هي على الترتيب (س ، ص) ، (سَ ، صَ) ، (سً ، صً)

وحيث أن المحورين وَسً ، وَصً ناتجة من انتقال المحاور الأصلية و س ، و ص إذن معادلات الانتقال هي :

س = سً + أ
(٥)
ص = صً + ب

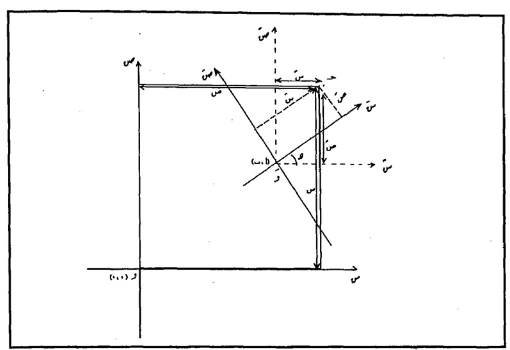
أيضاً المحورين وَسَ ، وَصَ ناتجة عن دوران المحورين بزاوية مقداها هـ في الإتجاه الموجب لمحور وَسً إذن معادلات الدوران هي :

سً = سَ حتا هـ − صَ حا هـ
(٦)
صً = سَ حا هـ + صَ حتا هـ

بالتعويض من المعادلات (٦) في المعادلات (٥) نحصل على المعادلات التي تمثل الدوران مع الانتقال والتي على الصورة .

س = سَ حتا هـ − صَ حا هـ + أ

، ص = سَ حا هـ + صَ حتا هـ + ب



شكل (٣ - ٣)

وكما ناقشنا أهمية نقل محوري الإحداثيات لتبسيط صورة المعادلة نناقش الآن ومن خلال المثال التالي أهمية الدوران في تبسيط أو تعديل صورة المعادلة حيث يمكننا في المثال الآتي وباستخدام الدوران حذف الحد الذي يحتوي على س ص في معادلة الدرجة الثانية .

فكما نعلم أن الصورة العامة لمعادلة الدرجة الثانية في س ، ص هي :

أ س^{٢} + ٢ م س ص + ب ص^{٢} + ٢ ل س + ٢ ك ص + حـ = ٠

وبإدارة المحاور بزاوية اختيارية هـ فإن المعادلة تصبح

أ (س حتا هـ - ص حا هـ)^{٢}+٢م(س حتا هـ - ص حا هـ)(س حا هـ + ص حتا هـ)

+ ب (س حا هـ + ص حتا هـ)^{٢} + ٢ ل (س حتا هـ - ص حا هـ)

+ ٢ ك (س حا هـ + ص حتا هـ) + حـ = ٠

وبوضع معامل س ص = صفراً (لحذف الحد الذي يحتوي على س ص)

اذن −٢ أ حا هـ حتا هـ + ٢ م (حتا^{٢} هـ − حا^{٢} هـ) + ٢ ب حا هـ حتا هـ = ٠

⇐ − أ حا ٢ هـ + ٢ م حتا ٢ هـ + ب حا ٢ هـ = ٠

٢ م حتا ٢ هـ = (أ − ب) حا ٢ هـ

$$\frac{\text{حا ٢هـ}}{\text{حتا ٢ هـ}} = \frac{\text{٢م}}{\text{أ − ب}}$$

$$\text{طا ٢ هـ} = \frac{\text{٢م}}{\text{أ − ب}}$$

$$\text{٢ هـ} = \text{طا}^{-١} \frac{\text{٢م}}{\text{أ − ب}} \Leftarrow \text{هـ} = \frac{١}{٢} \text{طا}^{-١} \frac{\text{٢م}}{\text{أ − ب}}$$

وهذه هي قيمة الزاوية هـ التي من المفروض أن يدور بها المحوران حتى يمكن تغيير صورة المعادلة وحذف الحد الذي يحتوي على س ص فيها .

مثال (٣ـ٣) :

أوجد قيمة الزاوية هـ اللازمة لدوران المحورين لحذف الحد الذي يحتوي على س ص في المعادلة

٧ س^{٢} − ٦ $\sqrt{٣}$ س ص +١٣ ص^{٢} = ١٦

الحـــــل :

نفرض أن الزاوية التي يدور بها المحوران هي هـ

والمحوران الجديدان و سَ ، و صَ

س = سَ حتا هـ − صَ حا هـ

ص = سَ حا هـ + صَ حتا هـ تصبح المعادلة

٧ (سَ حتا هـ − صَ حا هـ)^{٢} −٦ $\sqrt{٣}$ (سَ حتا هـ − صَ حا هـ) (سَ حا هـ + صَ حتا هـ)

+ ١٣ (سَ حا هـ + صَ حتا هـ)^{٢} = ١٦

(٧ حتا^{٢} هـ − ٦ $\sqrt{٣}$ حا هـ حتا هـ + ١٣ حا^{٢} هـ) سَ^{٢}

+ [١٢ حا هـ حتا هـ − ٦ $\sqrt{٣}$ (حتا^{٢} هـ − حا^{٢} هـ)] سَ صَ

+ (٧ حا^{٢} هـ + ٦ $\sqrt{٣}$ حا هـ حتا هـ + ١٣ حتا^{٢} هـ) صَ^{٢} = ١٦ (١)

ولحذف الحد الذي يحتوي على سَ صَ نضع معامل هذا الحد = صفراً

اذن ١٢ حا هـ حتا هـ − ٦ $\sqrt{٣}$ (حتا^{٢} حـ ـ حا^{٢} هـ) = ٠

٦ حا ٢ هـ = ٦ $\sqrt{٣}$ حتا ٢ هـ

$\frac{\text{حا٢هـ}}{\text{حتا٢هـ}} = \sqrt{٣}$

طا ٢ هـ = $\sqrt{٣}$

٢ هـ = ٦٠°

هـ = ٣٠°

إذن يجب إدارة المحاور بزاوية قدرها ٣٠° حتى نستطيع حذف الحد الذي يحتوي على س ص

وتؤول المعادلة (١) إلى

(٧ × $\frac{٣}{٤}$ − ٦ $\sqrt{٣}$ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ × $\frac{١}{٢}$ + ١٣ × $\frac{١}{٤}$) سَ^{٢}

+ (٧ × $\frac{١}{٤}$ + ٦ $\sqrt{٣}$ × $\frac{١}{٢}$ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + ١٣ × $\frac{٣}{٤}$) صَ^{٢} = ١٦

$$\left(\frac{٢١}{٤} - \frac{١٨}{٤} + \frac{١٣}{٤}\right)\text{س}^{٢} + \left(\frac{٧}{٤} + \frac{١٨}{٤} + \frac{٣٩}{٤}\right)\text{ص}^{٢} = ١٦$$

$$\Leftarrow \quad \frac{١٦}{٤}\text{س}^{٢} + \frac{٦٤}{٤}\text{ص}^{٢} = ١٦$$

بالقسمة على ١٦

إذن $$\frac{\text{س}^{٢}}{٤} + \text{ص}^{٢} = ٤$$

وهذه معادلة قطع ناقص في الصورة القياسية أيضاً كما سنرى فيما بعد عند دراسة القطوع .

***

تمارين (٣ - ١)

(١) أوجد معادلة المنحنى $٣ س^٢ - ٤ ص^٢ + ٦ س + ٢٤ ص = ١٣٥$

وذلك بنقل محوري الإحداثيات موازيين للمحورين الأصليين الى النقطة الاختيارية (١ ، -٣) .

(٢) أوجد معادلة المنحنى $س^٢ + ٢ س ص + ص^٢ + ٢ س - ٤ ص + ٣ = ٠$

والناتجة عن إدارة محوري الإحداثيات بزاوية ٤٥°

(٣) اثبت أنه لتأخذ المعادلة

$٥ س^٢ + ٦ س ص + ٥ ص^٢ - ٤ س + ٤ ص -٤ = ٠$

الصورة القياسية للقطع الناقص

$$\frac{س^٢}{أ^٢} + \frac{ص^٢}{ب^٢} = ٤$$

فإنه يجب نقل المحاور إلى النقطة (١ ، -١) وإدارتها بزاوية قدرها ٤٥°

ثم أوجد قيمة كلا من أ ، ب .

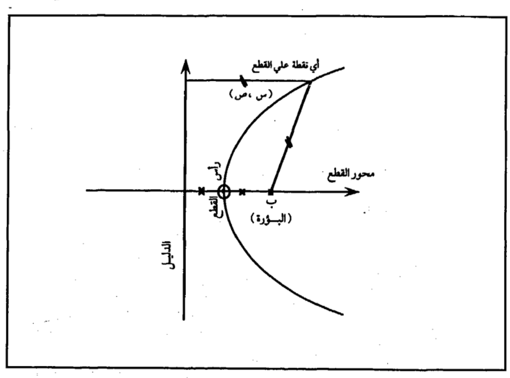
***

(٣ ـ ٤) القطع المكافئ

قبل دراسة المعادلة الكارتيزية للقطع المكافئ وكما تعودنا لا بد وأن نتعرف على القطع من الوجهة الهندسية فإذا تحركت نقطة بحيث تكون دائماً متساوية البعد عن نقطة ثابتة وعن مستقيم ثابت فإنها ترسم منحنيا نطلق عليه «القطع المكافئ» و انطلاقا من هذا التوضيح فإننا نضع التعريف التالي للقطع المكافئ .

تعريف :

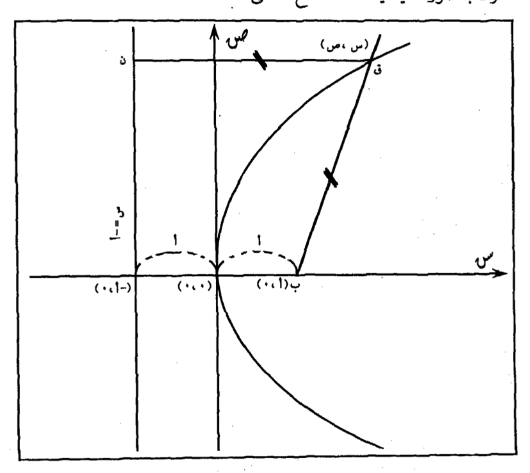
«القطع المكافئ هو مجموعة جميع النقاط المتساوية البعد عن نقطة ثابتة وعن مستقيم ثابت وتسمى النقطة الثابتة ببؤرة القطع ويسمى المستقيم الثابت بالدليل ويسمى المستقيم المار بالبؤرة وعمودياً على الدليل بمحور القطع وتسمى نقطة تقاطع المحور مع القطع برأس القطع أنظر شكل (٣ ـ ٤) .



شكل (٣ ـ ٤)

المعادلة الكارتيزية للقطع المكافئ :

«مسندة الى محوره كمحور أفقي والمماس عند الرأس كمحور رأس» والتي تعرف بالصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ .



شكل (٣-٥)

من شكل (٣ ـ ٥) نجد أن

نقطة الرأس ≡ (٠ ، ٠)

ونفرض أن البؤرة ≡ (أ ، ٠) يكون الدليل س = - أ

(لأن بعد الرأس (٠ ، ٠) عن البؤرة = بعد الرأس عند الدليل = أ)

فإذا كانت النقطة التي إحداثياتها ق (س ، ص) أي نقطة على القطع المكافئ

من تعريف القطع المكافئ |ق ب| = | ق ن |

وباستخدام قانوني البعد وطول العمود الساقط من نقطة على مستقيم

$$\sqrt{(س - أ)^2 + ص^2} = \frac{|س + أ|}{\sqrt{1 + 0}}$$

بتربيع الطرفين

$$(س - أ)^2 + ص^2 = |س + أ|^2$$

$$س^2 - 2أس + أ^2 + ص^2 = س^2 + 2أس + أ^2$$

$$ص^2 = 4أس \qquad (1)$$

هي معادلة القطع المكافئ الذي رأسه النقطة (٠ ، ٠) وبؤرته (أ ، ٠)

ودليله س = - أ

ملاحظات :

١ ـ محور الصادات مماس للقطع عند الرأس .

٢ ـ لا توجد أي نقطة حقيقية للقطع على يسار محور الصادات .

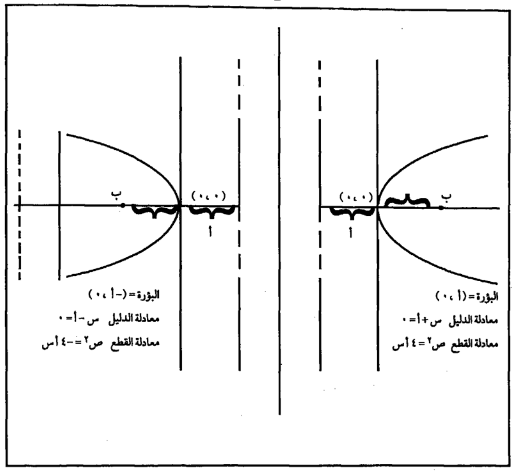
٣ ـ القطع متماثل بالنسبة لمحور السينيات .

٤ ـ منحنى القطع يمتد غير محدود في الربعين الأول والرابع .

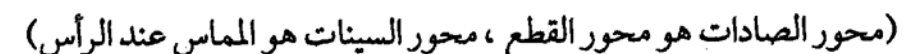
وتعرف المعادلة (١) بالصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ ولكن هناك صوراً قياسية مختلفة بناء على موضع القطع بالنسبة للمحاور وفي شكل (٣ ـ ٦) وشكل (٣ ـ ٧) نوضح بيانياً هذه الصورة المختلفة وايضاً معادلات هذه الصور المختلفة .

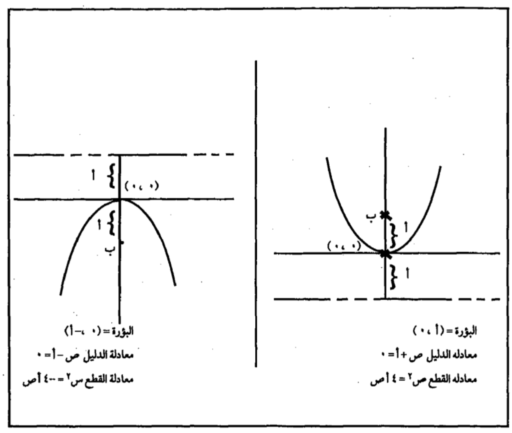
الصور المختلفة لمعادلة القطع المكافئ بالنسبة لمحوري الإحداثيات

(محور السينات هو محور القطع ، محور الصادات هو المماس عند الرأس)



شكل (٣ـ٦)


(محور الصادات هو محور القطع ، محور السينات هو المماس عند الرأس)



شكل (٣ ـ ٧)

مما سبق ومن الصور الأربعة السابقة (شكل (٣ ـ ٦) ، شكل (٣ ـ ٧)) نلاحظ أنه إذا كانت معادلة القطع المكافئ على الصورة ص^{2} = ٤ أ س فإن :

١ ـ إذا كانت أ موجبة (أ > ٠) فإن فتحة القطع إلى اليمين ومحوره هو محور السنيات .

٢ ـ إذا كانت أ سالبة (أ< ٠) فإن فتحة القطع إلى اليسار ومحوره هو محور السنيات أيضاً .

أما إذا كانت معادلة القطع المكافئ على الصورة . س^{2} = ٤ أ ص فإن

١ - إذا كانت أ موجبة (أ > ٠) فإن فتحة القطع ألى أعلى ومحوره محور الصادات .
٢ - إذا كانت أ سالبة (أ < ٠) فإن فتحة القطع إلى أسفل ومحور الصادات أيضاً .

(٣ ـ ٥) الوتر البؤري العمودي

يعرف في هذا الجزء بعض التعاريف التي تلقي المزيد من الضوء على القطع المكافئ .

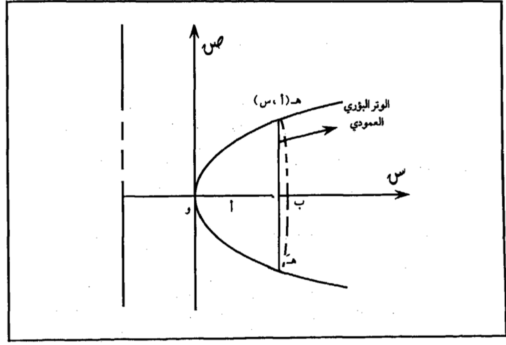
تعريف : نعرف المستقيم الواصل بين أي نقطتين على القطع وغير منطبقتين بوتر القطع .

تعريف : يعرف أي وتر للقطع ويمر بالبؤرة بالوتر البؤري .

تعريف : اذا كان وتر القطع عمودياً على محور القطع فأنه يعرف بالوتر العمودي .

تعريف : إذا كان وتر القطع يمر بالبؤرة وعمودي على محور القطع فإنه يعرف بالوتر البؤري العمودي للقطع .

نتيجة : طول الوتر البؤري العمودي للقطع المكافئ $ص^٢ = ٤ أ س$ هو ٤ أ



شكل (٣ - ٨)

البرهـــان :

واضح من الرسم أن المستقيم هـ هَـ هو الوتر البؤري العمودي للقطع (يمر بالبؤرة ب وعمودي على المحور و س)

وهو مستقيم // محور الصادات ويبعد عنه مسافة = أ

إذن معادلته هي س = أ

إذن إحداثيات النقطة هـ ≡ (أ ، ص)

إذن إحداثيات النقطة هَـ ≡ (أ ، −ص)

بما أن هـ تقع على القطع

إذن تحقق معادلته ⇐ ص^{2} = ٤ أ × أ

ص^{2} = ٤ أ^{2}

⇐ ص = + ٢ أ

طول الوتر البؤري العمودي = ٢ ص

= ٢ × ٢ أ = ٤ أ

(٣ ـ ٦) المعادلة الكارتيزية للقطع المكافئ الناتجة من انتقال المحاور

في استنتاجنا للمعادلة الكارتيزية للقطع المكافئ ص^{2} = ٤ أ س أسندناها إلى محورين أحدهما هو محور القطع (واعتبرناه المحور السيني) والآخر هو المماس عند الرأس (اعتبرناه المحور الصادي) وبالتالي فإن رأس القطع هو النقطة (٠ ، ٠) والآن ماذا لو لم يكن محورا الإسناد هما محوري القطع والمماس عند الرأس على الترتيب وللإجابة على هذا السؤال نأخذ المعادلة التالية :

(ص − ك)^{2} = ٤ أ (س − هـ)

فسنجد أن هـذه المعادلة تمثل قطعاً مكافئاً لانه باستخدام نقل المحاور (السابق دراسته) بأن ننقل نقطة الأصل إلى النقطة (هـ ، ك) مع عدم تغيير اتجاه المحورين فإن :

سَ = سَ + هـ

صَ = صَ + ك

وتأخذ المعادلة الصورة

(صَ + ك − ك)^{٢} = ٤ أ (سَ + هـ − هـ)

صَ^{٢} = ٤ أ سَ

وهذه هي الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ ويكون رأسه هو نقطة الأصل الجديدة المنقول إليها المحاور وهي (هـ ، ك) .

ملاحظات : مما سبق نلاحظ أنه إذا كان القطع المكافئ في الصورة السابقة

(ص − ك)^{٢} = ٤ أ (س − ل) فإن

١ ـ رأسه هي النقطة (ل ، ك)

٢ ـ طول وتره البؤري العمودي ٤ أ

٣ ـ محوره يوازي محور السينات ويبعد عنه مسافة = ك

أي أن معادلة محور القطع س = ك .

٤ ـ المماس عند الرأس يوازي محور الصادات ويبعد عنه مسافة = ل

∴ معادلة المماس عند الرأس هي س = ل

٥ ـ بؤرة القطع هي النقطة (ل + أ ، ك)

٦ ـ معادلة الدليل هي س = ل − أ

وعلى ذلك فإن جميع المعلومات السابقة يمكن إيجادها

إذا أمكن تحويل معادلة القطع المكافئ إلى الصورة

(ص − ك)^{٢} = ٤ أ (س − ل)

وهذه الملاحظات ضرورية جداً للاستعانة بها في تمثيل منحنى القطع بيانيا كما سنتعرض لذلك فيما بعد .

أما الوصول إلى هذه الصورة من صوره أخرى لأي معادلة تمثل قطع مكافئ فان يتم باستخدام الطرق والمهارة الجبرية كما سيرد ذلك في الأمثلة التالية .

مثال (٣ ـ ٤) :

إدرس معادلة القطع المكافئ ص^{٢} = ١٦ س ثم مثله بيانياً

الحـــل : من معادلة القطع

ص^{٢} = ١٦ س

بمقارنة هذه المعادلة بالصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ ص^{٢} ٤ أ س

٤ أ = ١٦

⇐ أ = ٤

ومن الملاحظات السابق ذكرها نجد أن :

١ ـ رأس القطع هو نقطة الأصل (٠ ، ٠)

٢ ـ متماثل حول محور السنيات

٣ ـ المماس عند الرأس هو محور الصادات

٤ ـ معادلة الدليل س + ٤ = ٠

٥ ـ فتحة القطع إلى اليمين

٦ ـ بؤرة القطع هي النقطة (٤ ، ٠)

٧ ـ طول الوتر البؤري العمودي = ١٦

٨ ـ إحداثيات طرفي الوتر البؤري العمودي

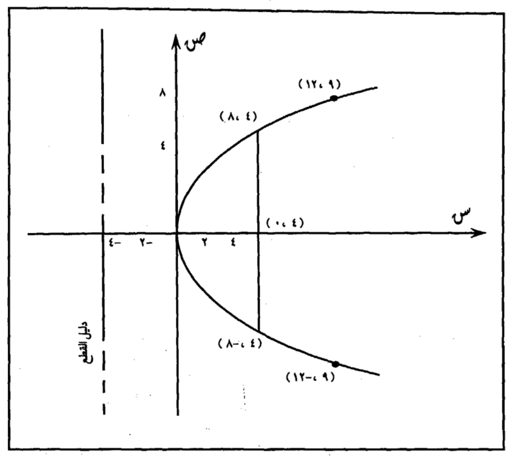
(٤ ، ٨) ، (٤ ، ـ ٨)

٩ ـ ليس هناك أي نقط حقيقية للقطع على يسار محور الصادات

١٠ ـ القطع يمتد بلا حدود في الربعين الأول والرابع

١١ـ ويمكن الحصول على نقط مساعدة بوضع س = ٩ فإن ص = ١٢

وباستخدام النتائج السابقة يمكننا تمثيل القطع المكافئ بيانياً كما يلي :



شكل (٣ - ٩)

مثال (٣ ـ ٥) :

أوجد معادلة القطع الذي بؤرته (٠ ، $\frac{-٤}{٣}$)

ومعادلة دليله ص - $\frac{٤}{٣}$ = ٠ ثم أوجد طول وتره البؤري العمودي .

الحـــل :

واضح أن معادلة القطع في الصورة س^{٢} = ٤ أ ص

(رأسه نقطة الأصل حيث بعدها عن البؤرة = بعدها عن الدليل)

$س^٢ = ٤ أ ص$　　　　$أ = \frac{-٤}{٣}$

$$س^٢ = ٤ \times \frac{-٤}{٣} ص$$

$$\Leftarrow س^٢ = \frac{-١٦}{٣} ص$$

طول الوتر البؤري العمودي $= |٤ أ| = \frac{١٦}{٣}$

مثال (٣ ـ ٦) :

أوجد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته هي النقطة (٦ ، −٢)

ودليله هو المستقيم ل = {(س ، ص) : س − ٢ = ٠}

الحـــــل :

نفرض نقطة هـ (س ، ص) تقع على القطع

من تعريف القطع

∴ |هـ ب| = طول العمود الساقط من هـ على الدليل

$$\sqrt{(س - ٦)^٢ + (ص + ٢)^٢} = \frac{|س - ٢|}{\sqrt{١ + ٠}}$$

بالتربيع

$$(س - ٦)^٢ + (ص + ٢)^٢ = (س - ٢)^٢$$

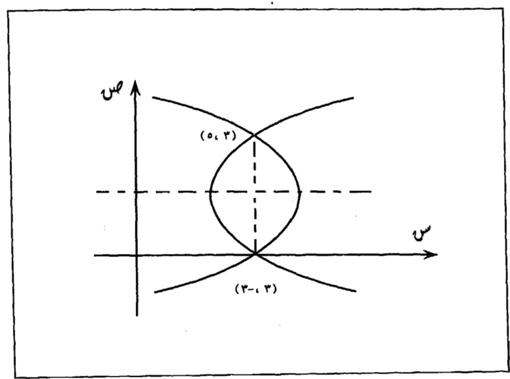
$$س^٢ - ١٢ س + ٣٦ + ص^٢ + ٤ ص + ٤ = س^٢ - ٤ س + ٤$$

$$\Leftarrow ص^٢ + ٤ ص - ٨ س + ٣٦ = ٠$$

هي معادلة القطع المطلوبة

مثال (٣ ـ ٧) :

أوجد القطع المكافئ الذي طرفا وتره البؤري العمودي هما (٣ ، ٥) ، (٣ ، -٣) .



شكل (٣ - ١٠)

الحـــــل :

طول الوتر البؤري العمودي = ٥ - (-٣) = ٨

٤أ = ٨ ⇐ أ = ٢

وواضح أن محور القطع يوازي محور السينات .

إذن معادلة القطع هي (س - ك)^{٢} = + ٨ (س - ل)

بما أن النقطتان (٣ ، ٥) ، (٣ ، -٣) تحققان معادلة القطع

إذن (٥ - ك)^{٢} = ± ٨ (٣ - ل)   (١)

، (-٣ - ك) = ± ٨ (٣ ـ هـ)   (٢)

من (١) ، (٢) نجد أن

(٥ - ك)^{٢} = (-٣ - ك)^{٢}

إذن ٥ - ك = ٣ + ك

٢ = ٢ ك

ك = ١

بالتعويض في (١) نجد أن

١٦ = ± ٨ (٣ - ل)

٣ - ل = ٢   أو   ٣ - ل = -٢

ل = ١   أو   ل = ٥

إذن رأس القطع (١ ، ١)   أو   (٥ ، ١)

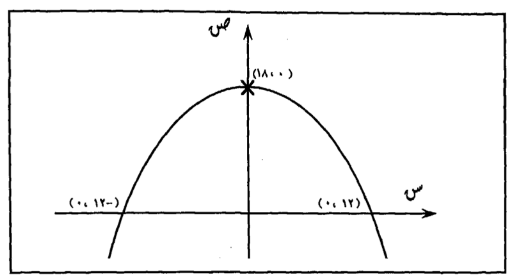
إذن هناك قطعان يمكن أن يحققا المطلوب

معادلة الأول هى (ص - ١)^{٢} = ٨ (س - ١) ⟸ ص^{٢} - ٢ ص + ٨ س + ٩ = ٠

ومعادلة الثاني هى (ص - ١)^{٢} = -٨ (س - ٥) ⟸ ص^{٢} - ٢ ص + ٨ س - ٣٩ = ٠

مثال (٣ ـ ٨) :

أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه (٠ ، ١٨) ويمر بالنقطتين (١٢ ، ٠) ، (-١٢ ، -٠) .



شكل (٣-١١)

الحـــــل :

معادلة القطع في الصورة

(س - ل)^{2} = ٤ أ (ص - ك)

بما أن رأس القطع هي النقطة (٠ ، ١٨)

إذن معادلة القطع هي

(س - ٠)^{2} = ٤ أ (ص - ١٨)

بما أن القطع يمر بالنقطة (١٢ ، ٠)

إذن (١٢ - ٠)^{2} = ٤ أ (٠ - ١٨)

١٤٤ = ٤ أ × -١٨

أ = -٢

وبالتالي تكون معادلة القطع هي :

س^{2} = - ٨ (ص - ١٨)

مثال (٣ – ٩) :

ارسم القطع المكافئ

$س^٢ - ٢ س + ٢ ص - ٣ = ٠$

الحـــــل :

باكمال المربع

$(س^٢ - ٢ س + ١) - ١ + ٢ ص - ٣ = ٠$

$(س - ١)^٢ = - ٢ (ص - ٢)$

وينقل المحاور إلى النقطة (١ ، ٢) تصبح المعادلة

$سَ^٢ = - ٢ صَ$ اذن $٤ أ = - ٢$

$\Leftarrow أ = - \frac{١}{٢}$

وهي معادلة قطع مكافئ فيه :

١ ـ محوره رأسي

٢ ـ مفتوح إلى أسفل

٣ ـ رأسه هي النقطة (١ ، ٢)

٤ ـ متماثل حول المحور الرأس س = ١

٥ ـ المماس عند الرأس هو المستقيم ص = ٢

٦ ـ بؤرة القطع $(١ ، \frac{٣}{٢})$

٧ ـ دليل القطع هو المستقيم ص = $\frac{٥}{٢}$

٨ـ طول الوتر البؤري العمودي = ٢

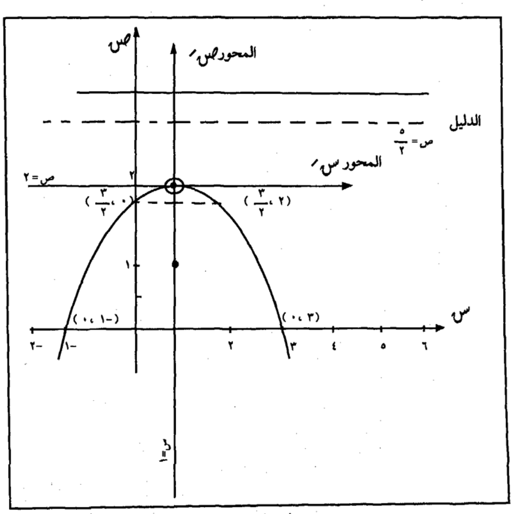
٩ـ احداثيات نهايتا الوتر البؤري العمودي $(\cdot ، \frac{٣}{٢})$ ، $(٢ ، \frac{٣}{٢})$

١٠ـ نقط تقاطع القطع مع محور السنيات (بوضع ص = ٠)

(٣ ، ٠) ، (– ١ ، ٠)

١١ـ نقط تقاطع القطع مع محور الصادات (بوضع س = ٠)

$(\cdot ، \frac{٣}{٢})$ وهي احدى طرفي الوتر البؤري العمودي .

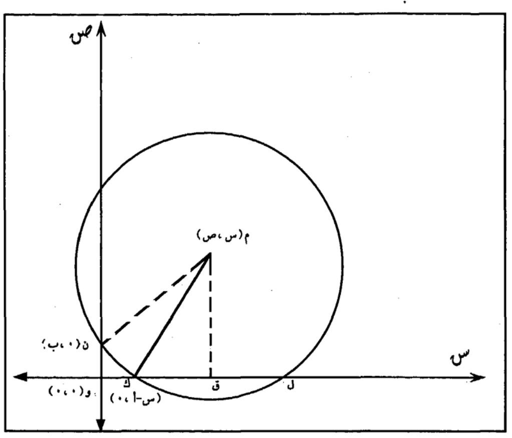


شكل (٣-١٢)

مثال (٣ ـ ١٠) :

اثبت أن المحل الهندسي لمركز الدائرة التي تقطع وتراً طوله ٢أ من محور السنيات وتمر بالنقطة (٠ ، ب) هي قطع مكافئ رأسه النقطة .

(٠ ، $\frac{ب^{٢} - أ^{٢}}{٢ ب}$) وطول وتره البؤري العمودي = ٢ ب



شكل (٣-١٣)

الحـــــل :

نفرض أن احداثياً مركز الدائرة هو (س ، ص)

من الرسم (شكل ٣ ـ ١٣)

ك ل = ٢ أ   فرضاً

ك ق = أ

ولكن و ق = س

و ك = س − أ

إذن احداثيات النقطة ك هي (س − أ ، ٠)

| م ك | = | م ن | (أنصاف أقطار في الدائرة)

$$\sqrt{(\text{س} - ٠)^{٢} + (\text{ص} - \text{ب})^{٢}} = \sqrt{[\text{س} - (\text{س} - \text{أ})]^{٢} + (\text{ص} - ٠)^{٢}}$$

بتربيع الطرفين نحصل على

$$\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} - ٢\,\text{ب ص} + \text{ب}^{٢} = \text{أ}^{٢} + \text{ص}^{٢}$$

$$\Leftarrow \text{س}^{٢} - ٢\,\text{ب ص} + \text{ب}^{٢} = \text{أ}^{٢}$$

$$\Leftarrow \text{س}^{٢} = \text{ق}^{٢}\text{ب ص} + (\text{أ}^{٢} - \text{ب}^{٢})$$

$$\Leftarrow \text{س}^{٢} = ٢\,\text{ب}\left(\text{ص} - \frac{\text{أ}^{٢} - \text{ب}^{٢}}{٢\,\text{ب}}\right)$$

وهذه معادلة قطع مكافئ رأسه هو النقطة $\left(٠ ، \frac{\text{أ}^{٢} - \text{ب}^{٢}}{٢\,\text{ب}}\right)$

وبالتالي يكون المحل الهندسي لمركز الدائرة هو قطع مكافئ رأسه هي النقطة

$$\left(٠ ، \frac{\text{أ}^{٢} - \text{ب}^{٢}}{٢\,\text{ب}}\right)$$

***

تمارين (٣ ـ ٢)

(١) أوجد احداثيات الرأس والبؤرة وكذلك طول الوتر البؤري العمودي للقطع المكافئ

$$ص٢ - ٤\,ص - ٤\,س + ١٦ = ٠$$

(٢) أوجد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته (٢ ، ٢) ودليله هو المستقيم

$$٣\,س + ٢ص = ٦$$

أوجد كذلك إحداثي رأس القطع وطول وتره البؤري العمودي .

(٣) أوجد احداثيات الرأس والبؤرة لقطع المكافئ

$$س^{٢} + ٤\,س + ٤\,ص + ١٦ = ٠$$

(٤) أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه (٠ ، ٠) وبؤرته (٠ ، ٢) وأوجد معادلة دليله .

(٥) أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه (٢ ، ٠) ودليله محور الصادات .

(٦) اثبت أن المحل الهندسي لنقطة تتحرك بحيث يكون بعدها عن مستقيم ثابت مساوياً لطول المماس المرسوم منها لدائرة ثابتة هو قطع مكافئ .

(٧) اثبت أن معادلة القطع المكافئ الذي تقع رأسه وبؤرته على محور السنيات وتبعدان عن نقطة الأصل مسافة أ ، أَ على الترتيب هي

$$ص^{٢} = ٤\,(أَ - ١)\,(س - أ) \;.$$

(٨) ارسم القطع المكافئ

$$س - ٤\,س - ٢\,ص + ١٠ = ٠$$

(٣-٧) معادلتا المماس والعمودي للقطع المكافئ عندأي نقطة تقع عليه

لايجاد معادلتا المماس والعمودي للقطع المكافئ نفرض أن :

معادلة القطع في الصورة القياسية $ص^٢ = ٤ أ س$

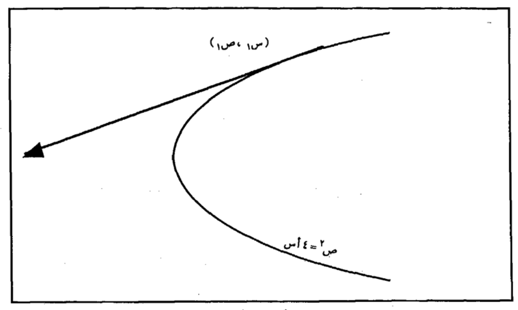
فإذا فرضنا نقطة على القطع مثل $(س_١ ، ص_١)$

بإيجاد المشتقة الأولى لمعادلة القطع نحصل على

$$٢ ص \frac{د ص}{د س} = ٤ أ$$

$$\frac{د ص}{د س} = ٢ أ$$

$$ولكن\ م = \left. \frac{د ص}{د س} \right|_{(س_١ ، ص_١)} = \frac{٢ أ}{ص_١}$$



(٣-١٤)

وباستخدام صورة الميل ونقطة على المستقيم تكون معادلة المماس هي :

$$ص - ص_١ = \frac{٢ أ}{ص_١} (س - س_١)$$

$$ص ص_١ - ص_١^٢ = ٢ أ س - ٢ أ س_١$$

$$ص ص_١ - ٤ أ س_١ = ٢ أ س - ٢ أ س_١$$

$$ص ص_١ = ٢ أ س + ٢ أ س_١$$

$$ص ص_١ = ٢ أ (س + س_١) \qquad (١)$$

وهذه هي معادلة المماس المطلوب

ولإيجاد ميل العمودي على المماس عند نفس النقطة $(س_١ ، ص_١)$

بما أن ميل المماس $م = \frac{٢أ}{ص_١}$

إذن ميل العمودي على المماس $\bar{م} = \frac{-ص_١}{٢أ}$

إذن معادلة العمودي هي $ص - ص_١ = \bar{م} (س - س_١) \qquad (٢)$

$$ص - ص_١ = \frac{-ص_١}{٢أ} (س - س_١)$$

$٢ أ ص - ٢ أ ص_١ = - س_١ ص_١ + س_١ ص$ هي معادلة العمودي المطلوبة

$\bar{م}$ (ميل العمودي) $= \frac{-ص_١}{٢أ}$

$$ص_١ = -٢ أ \bar{م} \qquad (٣)$$

ولكن $ص_١^٢ = ٤ أ س_١$

$$س_١ = \frac{-ص_١^٢}{٤أ} = \frac{٤أ^٢ \bar{م}^٢}{٤أ} = أ \bar{م}^٢ \qquad (٤)$$

بالتعويض من (٣) ، (٤) في (٢) نجد أن

$$ص + ٢ أ \bar{م} = \bar{م} (س - أ \bar{م}^٢)$$

$ص = \bar{م} س - ٢ أ \bar{م} - أ \bar{م}^٣$ حيث $\bar{م}$ هو ميل العمودي .

ملاحظة هامة :

إذا أخذنا أي قيمة للنقطة (س ، ص) وعوضنا في معادلة العمودي السابقة فانه ينتج معادلة من الدرجة الثالثة في مَ أي أن هناك ثلاث قيم لميل العمود وهذا يدل على أنه يمكن رسم ثلاث أعمدة حقيقية من نقطة ما (غير واقعة على القطع) للقطع المكافىء .

(٣-٨) شرط تماس المستقيم ص = م س + حـ للقطع المكافىء $ص^٢$ = ٤ أس :

بالتعويض عن ص من معادلة المستقيم في معادلة القطع نجد أن

$$(م س + حـ)^٢ = ٤ أس$$

$$م^٢ س^٢ + ٢ م س حـ + حـ^٢ - ٤ أس = ٠$$

$$م^٢ س^٢ + ٢ (م جـ - ٢ أ) س + جـ^٢ = ٠ \qquad (١)$$

والمعادلة (١) هي معادلة من الدرجة الثانية في س

إذن لها جذران أي تعطي نقطتين لتقاطع المستقيم والقطع

وبما أن المستقيم يمس القطع

إذن نقطتا التقاطع تنطبقا ويصبح جذرا المعادلة منطبقان وشرط تطابق جذار المعادلة أن يكون مميزها = ٠

بما أن المميز $= بَ^٢ - ٤ أَ جَ$ حيث

$$أَ = م^٢ \text{ ، } بَ = ٢ (م جـ - ٢أ) \text{ ، } جَ = جـ^٢$$

إذن المميز $= ٤ (م جـ - ٢ أ)^٢ - ٤ م^٢ جـ^٢ =$ صفراً

$$٤ (م^٢ جـ^٢ - ٤ أ م جـ + ٤ أ^٢) - ٤ م^٢ جـ^٢ = ٠$$

$$٤ م^٢ جـ^٢ - ١٦ أ م جـ + ١٦ أ^٢ - ٤ م^٢ جـ^٢ = ٠$$

$$١٦ أ م جـ = ١٦ أ^٢$$

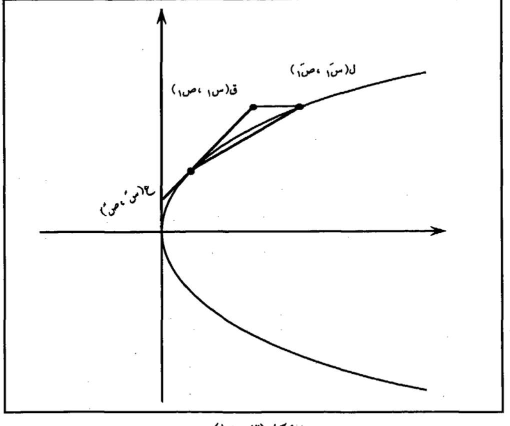
إذن م = $\frac{أ}{جـ}$ أو جـ = $\frac{أ}{م}$

هو شرط التماس المطلوب

ويكون المستقيم

ص = م س + $\frac{أ}{م}$ مماسا للقطع المكافئ ص^{٢} = ٤أس لجميع قيم م الحقيقية

(٣-٩) معادلة وتر التماس بالنسبة للقطع المكافئ ص^{٢}= ٤ أ س للنقطة (س$_{١}$ ، ص$_{١}$)



شكل (٣ - ١٥)

قبل أن نستنتج معادلة وتر التماس دعنا نتعرف على المعنى الهندسي لوتر التماس للنقطة (س$_{١}$ ، ص$_{١}$) بالنسبة للقطع ص^{٢} = ٤ أ س

(تماما كما في الدائرة) فإذا رسم مماسان من النقطة ق ($س_١$ ، $ص_١$)

للقطع المكافئ $ص^٢ = ٤أس$ حيث يقابلاه في النقطتين قَ (سَ ، صَ) ، قً (سً ، صً) فإن الوتر قَ قً هو وتر التماس المقصود

بما أن ق قَ مماس للقطع

إذن معادلته هي $ص\,صَ = ٢أ\,(س + سَ)$ (١)

بما أن ق قً مماس للقطع أيضا إذن معادلته هي $ص\,صً = ٢أ\,(س + سً)$ (٢)

ولكن كلا من هذين المماسين يمران بالنقطة ($س_١$ ، $ص_١$)

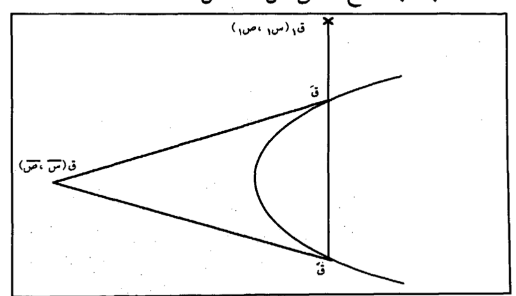
اذن من (١) $ص_١\,صَ = ٢أ\,(س_١ + سَ)$ (٣)

، من (٢) $ص_١\,صً = ٢أ\,(س_١ + سً)$ (٤)

وبالتالي فإن معادلة وتر التماس الذي يمر بالنقطة (سَ ، صَ) ، (سً ، صً) هي

$$ص\,ص_١ = ٢أ\,(س + س_١)$$

(٣-١٠) معادلة الخط القطبي للنقطة ($س_١$ ، $ص_١$) بالنسبة للقطع المكافئ $ص^٢ = ٤أس$



شكل (٣-١٦)

سبق لنا تعريف الخط القطبي لنقطة بالنسبة للدائرة والآن نعرف الخط القطبي بالنسبة للقطع المكافئ $ص^{٢} = ٤أس$

إذا رسمنا من $ق_{١}$ قاطعا للقطع بحيث يقطعه في النقطتين $قَ$ ، $قً$ ثم رسمنا المماسين للقطع عند النقطتين $قَ$ ، $قً$ بحيث يتقاطعان في النقطة ق

فإن المحل الهندسي للنقطة ق هو خط مستقيم يسمى بالخط القطبي للنقطة $ق_{١}$

وهذا معناه أن النقطة ق تتحرك بحيث يمر وتر الماس لها $قَ قً$ بنقطة ثابتة هي $ق_{١}$.

وبتعبير آخر فإن الخط القطبي للنقطة ق هو مجموعة جميع النقط التي يمر وتر تماسها بالنسبة للقطع المكافئ بنقطة ثابتة $ق_{١}$ ولايجاد معادلة الخط القطبي .

فإن معادلة وتر التماس هي $ص صَ = ٢أ(س + سَ)$

ولكن النقطة $ق_{١}$ تقع على وتر التماس إذن تحقق معادلته

وبالتالي فإن $ص_{١} صَ = ٢أ(س_{١} + سَ)$

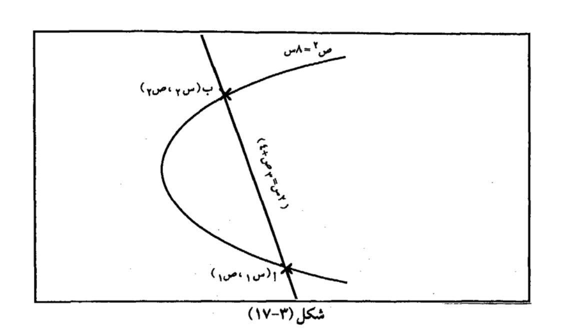
إذن المحل الهندسي للنقطة ق هو $ص ص_{١} = ٢أ(س + س_{١})$

وهذا معادلة الخط القطبي للنقطة $ق_{١}$

مثال (٣ - ١٦)

أوجد طول الوتر الذي يقطعه القطع المكافئ $ص^{٢} = ٨ س$ من المستقيم

$٢ س - ٣ ص + ٤ = ٠$



شكل (٣-١٧)

الحـــل :

نفرض أن نقطتي تقاطع المستقيم والقطع هما أ (س$_{1}$ ، ص$_{1}$) ، ب (س$_{2}$ ، ص$_{2}$)

إذن المطلوب طول الوتر $\overline{\text{أ ب}}$

من معادلة المستقيم إذن ص = $\frac{\text{٢س} - ٤}{٣}$

بالتعويض في معادلة القطع نجد أن

$$\left(\frac{\text{٢س} + ٤}{٣}\right)^{٢} = \text{٨ س}$$

$$\frac{\text{٤س}^{٢} + \text{١٦س} + ١٦}{٩} = \text{٨ س}$$

$$\text{٤س}^{٢} + \text{١٦س} + ١٦ = \text{٧٢ س}$$

$$\text{٤س}^{٢} - \text{٥٦ س} + ١٦ = ٠$$

$$\text{س}^{٢} - \text{١٤ س} + ٤ = ٠$$

وهذه معادلة من الدرجة الثانية لها جذرين هما $س_1$ ، $س_2$

بحيث : $س_1 + س_2 = ١٤$ ، $س_1 س_2 = ٤$ (١)

وأيضاً من معادلة المستقيم $٢ س = ٣ ص - ٤$

أي $س = \frac{٣ص - ٤}{٢}$

بالتعويض في معادلة القطع نجد أن

$ص^2 = ٨ \left(\frac{٣ص - ٤}{٢} \right)$

$ص^2 = ١٢ ص - ١٦$

$ص^2 - ١٢ص + ١٦ = ٠$

وهذه معادلة من الدرجة الثانية لها جذران $ص_1$ ، $ص_2$

بحيث $ص_1 + ص_2 = ١٢$ ، $ص_1 ص_2 = ١٦$ (٢)

طول الوتر $أ ب = \sqrt{(س_1 - س_2)^2 + (ص_1 - ص_2)^2}$

$= \sqrt{س_1^2 + س_2^2 - ٢ س_1 س_2 + ص_1^2 + ص_2^2 - ٢ص_1 ص_2}$

$= \sqrt{س_1^2 + ٢س_1 س_2 + س_2^2 - ٤س_1 س_2 + ص_1^2 + ٢ ص_1 ص_2 + ص_2^2 - ٤ص_1 ص_2}$
(لإكمال المربع)

$= \sqrt{(س_1 + س_2)^2 - ٤ س_1 س_2 + (ص_1 + ص_2)^2 - ٤ ص_1 ص_2}$

بالتعويض من (١) ، (٢) نجد أن

$|أب| = \sqrt{(١٤^2 - ٤ \times ٤) + (١٢^2 - ٤ \times ١٦)}$

$= \sqrt{١٩٦ - ١٦ + ١٤٤ - ٦٤}$

$= \sqrt{٣٤٠ - ٨٠} = \sqrt{٢٦٠}$

$= ٢ \sqrt{٦٥}$ وحده طول

مثال (٣ - ١٧) :

أوجد معادلة المماس والعمودي عليه للقطع المكافئ

$ص^{٢} - ٣س + ٢ص + ٩ = ٠$ عند النقطة (٤ ، ١)

ميل المماس للمنحنى عند النقطة $(س_{١} ، ص_{١})$ = $\left|\frac{د ص}{د س}\right|_{(س_{١} ، ص_{١})}$

بإجراء التفاضل لمعادلة القطع نحصل على $٢ص \frac{د ص}{د س} - ٣ + ٢ \frac{د ص}{د س} = ٠$

$٢ \frac{د ص}{د س} (ص + ١) = ٣$ ،

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{٣}{٢(ص + ١)}$$

$$م = \left|\frac{د ص}{د س}\right|_{(١ ، ١)} = \frac{٣}{٢(ص + ١)} = \frac{٣}{٤}$$

ميـل المماس = $\frac{٣}{٤}$ ويمر بالنقطة (٤ ، ١)

إذن معادلة المماس هي $(ص - ١) = \frac{٣}{٤} (س - ٤)$

$٤ ص - ٤ = ٣ س - ١٢$

$٤ ص - ٣ س + ٨ = ٠$

ميــل العمــودي = $- \frac{٣}{٤}$

إذن معادلة العمودي $(ص - ١) = - \frac{٤}{٣} (س - ٤)$

$٣ ص - ٣ = - ٤س + ١٦$

$٣ ص + ٤س - ١٩ = ٠$

مثال (٣ – ١٨) :

إذا كـان المستقيم س + ص = ك يمس القطع المكافئ ص – س – س^{٢} = ٠
فأوجد قيمة ك

الحـل :

من معادلة المستقيم ص = ك – س

بالتعويض في معادلة القطع

(ك – س) – س – س^{٢} = ٠

ك – ٢س – س^{٢} = ٠

س^{٢} + ٢س – ك = ٠

وهذا معادلة من الدرجة الثانية في س لها جذران

وكي يمس المستقيم القطع لا بد وأن مميز هذا المعادلة يساوي صفراً

بوضع المميز ب^{٢} – ٤ أجـ = ٠

٤ – ٤ × – ك = ٠

٤ك = – ٤

ك = – ١

إذن الشرط اللازم لكي يمس المستقيم س + ص = ك

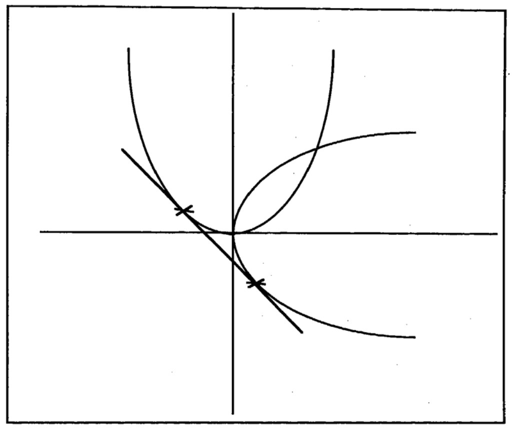
القطع المكافئ ص – س – س^{٢} = ٠

هو ك = – ١

مثال (٣- ١٩) :

أوجد معادلة المماس المشترك للقطعين $ص^٢ = ٤ أ^٣ س$ ، $س^٢ = ٤ ب^٣ ص$

وكذلك نقطتي التماس وطول المماس المشترك



شكل (٣ - ١٨)

الحـــــل :

معادلة المماس للقطع الأول هي $ص = م س + \frac{أ^٣}{م}$ (من شرط التماس)

معادلة المماس للقطع الثاني هي $س = مَ ص + \frac{ب^٣}{م}$ (من شرط التماس)

بما أن المماس مشترك

إذن لتتطابق المعادلتان لا بد أن تتناسب المعاملات

$$\frac{\text{١}}{-\text{مَ}} = \frac{-\text{م}}{\text{١}} = \frac{\text{أ}^{\text{٣}}}{\text{م}} / \frac{\text{ب}^{\text{٣}}}{\text{مَ}}$$ (١)

، من المعادلة (١)

$$\frac{\text{١}}{-\text{مَ}} = \frac{-\text{مَ}\,\text{أ}^{\text{٣}}}{\text{م}\,\text{ب}^{\text{٣}}}$$

$$-\text{مَ}^{\text{٢}}\,\text{أ}^{\text{٣}} = \text{م}\,\text{ب}^{\text{٣}}$$

إذن $$\text{م} = \frac{-\text{مَ}^{\text{٢}}\,\text{أ}^{\text{٣}}}{\text{ب}^{\text{٣}}}$$ (٢)

وأيضاً من المعادلة (١)

$$\text{م} = \frac{-\text{أ}^{\text{٣}}}{\text{م}} \times \frac{\text{مَ}}{\text{ب}^{\text{٣}}}$$

$$\text{م}^{\text{٢}}\,\text{ب}^{\text{٣}} = -\text{مَ}\,\text{أ}^{\text{٣}}$$ (٣)

بالتعويض من (٢) في (٣)

$$\frac{\text{مَ}^{\text{٤}}\,\text{أ}^{\text{٦}}}{\text{ب}^{\text{٣}}} \times \text{ب}^{\text{٣}} = -\text{مَ}\,\text{أ}^{\text{٣}}$$

$$\text{مَ}^{\text{٤}}\,\text{أ}^{\text{٦}} = -\text{مَ}\cdot\text{أ}^{\text{٣}}\,\text{ب}^{\text{٣}}$$

$$\text{مَ}^{\text{٣}}\,\text{أ}^{\text{٣}} = -\text{ب}^{\text{٣}}$$

$$\text{مَ}^{\text{٣}} = \frac{-\text{ب}^{\text{٣}}}{\text{أ}^{\text{٣}}}$$

إذن $$\text{مَ} = \frac{-\text{ب}^{\text{٣}}}{\text{أ}^{\text{٣}}}$$ وبالتعويض في (٢)

فإن $$\text{م} = -\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$$

إذن معادلة المماس المشترك هي

$$ص = -\frac{أ}{ب}\,س - أ^{٢}\,ب$$

ومنها : $$ب\,ص = -\,أ\,س - أ^{٢}\,ب^{٢}$$

$$أ\,س + ب\,ص + أ^{٢}\,ب^{٢} = ٠$$

وتكون إحداثيا نقطة التماس للقطع الأول هي

$$س_{١} = \frac{أ^{٣}}{م^{٢}} = أ\,ب^{٢}$$

$$ص_{١} = \frac{٢أ^{٣}}{م} = -٢\,أ^{٢}\,ب$$

نقطة التماس الأولى هي $\equiv (أب^{٢} ، -٢أ^{٢}ب)$

وإحداثيات نقطة التماس الثانية

$$س_{٢} = \frac{٢ب^{٣}}{م} = -٢\,أ\,ب^{٢}$$

$$ص_{٢} = \frac{ب^{٣}}{م^{٢}} = أ^{٢}\,ب$$

ويكون طول المماس $= \sqrt{(٣أب^{٢})^{٢} + (-٣أ^{٢}ب)^{٢}}$

$$= ٣\,أ\,ب\,\sqrt{أ^{٢} + ب^{٢}}$$

مثال (٣ − ٢٠) :

من النقطة (− ٥ ، ٢) رسم مماسان للقطع المكافئ

$$ص^{٢} - ص - ٢س + ٤ = ٠$$

أوجـــد :

١ - نقطتي التماس .

٢ - معادلة المماس عند كل نقطة من نقط التماس .

٣ -طول وتر التماس .

الحـــل :

بما أن معادلة المنحنى هي $ص^٢ - ص - ٢س + ٤ = ٠$

بإجراء التفاضل إذن $٢ص \frac{د ص}{د س} - \frac{د ص}{د س} - ٢ = ٠$

وبالتالي فإن ميل المماس للمنحنى عند أي نقطة $= \frac{د ص}{د س} = \frac{٢}{٢ص - ١}$

فإذا كانت نقطة التماس هي $(س_١ ، ص_١)$

إذن $م = \frac{٢}{٢ص_١ - ١}$

وتكون معادلة المماس هي $(ص - ٢) = \frac{٢}{٢ص_١ - ١} (س + ٥)$

بما أن النقطة $(س_١ ، ص_١)$ تقطع على كل من المنحنى (١) والمماس (٢)

إذن تحقق كلاً من المعادلتين

ويكون $ص_١^٢ - ص_١ - ٢س_١ + ٤ = ٠$

$(ص_١ - ٢) = \frac{٢}{٢ص - ١} (س_١ + ٥)$

وبحل المعادلتين (٣) ، (٤) معاً ينتج أن :

$س_١ = ١٧$ ، $س_١ = ٥$

ومنها $ص_١ = ٦$ ، $ص_١ = - ٢$

أي أن نقطتي التماس هما (١٧ ، ٦) ، (٥ ، -٢)

تمارين (٣ - ٣)

(١) أوجد قيمة ك التي تجعل المستقيم ك س - ص - ٥ = ٠

مماساً للقطع المكافئ ص = ٣ س^{٢} + ٢س + ٤

(٢) أوجد معادلة المماس للقطع المكافئ

ص^{٢} - ٣س + ٢ص + ٩ = ٠ عند النقطة (٤ ، ١)

(٣) أوجد معادلة المماس للقطع المكافئ ص^{٢} = ٧ س والذي يوازي المستقيم ٤ ص - س + ٣ = ٠ وأوجد إحداثيات نقطة التماس

(٤) أثبت أن المستقيم س + ص = ١ يمس القطع المكافئ ص = س - س٢

(٥) أوجد معادلة المماس والعمودي عند كل من طرفي الوتر البؤري العمودي للقطع المكافئ ص^{٢} = ٤أ (س - أ)

(٦) أثبت أن مماس القطع المكافئ ص^{٢} = ٤ أس عند النقطة (س$_{١}$ ، ص$_{١}$)

عمودي على مماس القطع عند النقطة $\left(\frac{أ^{٢}}{س_{١}} ، \frac{-٤أ^{٢}}{ص_{١}} \right)$

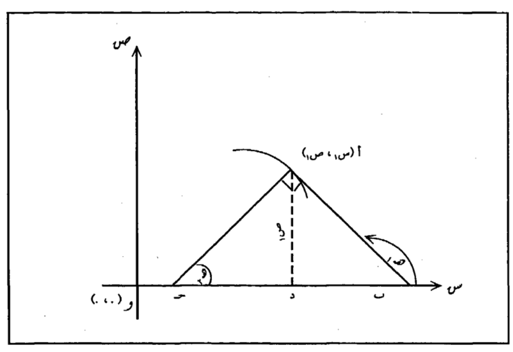
(٧) أوجد معادلة المماسين المرسومين من النقطة (- ٣ ، - ٢) للقطع المكافئ

ص^{٢} = ٤ س وأوجد إحداثيات نقطة التماس

(٨) أثبت أن أي مماس للقطع المكافئ يقطع الدليل وامتداد الوتر البؤري العمودي في نقطتين متساويتي البُعد عن البؤرة .

***

(٣ - ١١) تحت المماس وتحت العمود لمنحنى ما



شكل (٣ - ١٩)

شكل (٣ - ١٩) $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ مماس للمنحنى عند النقطة أ (س$_١$ ، ص$_١$) يلاقي محور السينات في النقطة ب

، $\overleftrightarrow{\text{أجـ}}$ العمودي على المماس عند نفس النقطة أ (س$_١$ ، ص$_١$) يلاقي محور السينات عند النقطة جـ

$\overline{\text{ب د}}$ هو مسقط المماس $\overline{\text{أ ب}}$ على محور السينات، $\overline{\text{جـ د}}$ هو مسقط العمود $\overline{\text{أ جـ}}$ على محور السينات أيضا

يسمي $\overline{\text{ب د}}$ بتحت التماس عند النقطة (س$_١$ ، ص$_١$)

، ويسمي $\overline{\text{جـ د}}$ بتحت العمود عند النقطة (س$_١$ ، ص$_١$)

(٣ - ١٢) طول تحت المماس وتحت العمود لاي منحنى

من شكل (٣ - ٩) نلاحظ أن

$$\frac{حـ\ د}{ص_١} = -\ طتا\ هـ_١$$

$$\frac{حـ\ د}{ص_١} = -\ \frac{١}{م}$$

$$جـ\ د = -\ \frac{ص_١}{م}$$

طول تحت المماس $= \frac{-ص_١}{م}$ وباعتبار أن $م = \left|\frac{د\ ص}{د\ س}\right|_{(س_١ ،\ ص_١)}$

إذن طول تحت المماس $= -\ ص_١ \Big/ \left|\frac{د\ ص}{د\ س}\right|_{(س_١ ،\ ص_١)}$

ولإيجاد طول تحت العمود :

$$\frac{حـ\ د}{ص_١} = -\ طتا\ هـ_٢$$

$$= -\ طتا\ (هـ_١ - ٩٠)$$

$$= طا\ هـ_١$$

$$= م$$

$جـ\ د = ص_١ \cdot م$ طول تحت العمود $= ص_١ \cdot م$

أي طول تحت العمود $= ص_١ \cdot \left|\frac{د\ ص}{د\ س}\right|_{(س_١ ،\ ص_١)}$

مثال (٣ - ٢١) :

أوجد طول تحت المماس وتحت العمود للقطع المكافئ

$\text{ص}^{٢} - ٦\,\text{ص} - ٨\,\text{س} - ٣١ = ٠$ عند النقطة $(-٣ ، -١)$

الحـــل :

بإجراء التفاضل بالنسبة لمعادلة القطع نحصل على

$$٢\,\text{ص}\,\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} - ٦\,\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} - ٨ = ٠$$

بالقسمة على ٢

$$(\text{ص} - ٣)\,\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = ٤$$

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{٤}{\text{ص} - ٣}$$

$$\left|\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}\right|_{(-٣ ، -١)} = \frac{٤}{-١-٣} = \frac{٤}{-٤} = -١$$

إذن طول تحت المماس $= -\text{ص}_{١} \Big/ \left|\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}\right|_{(-٣ ، -١)}$

$$= \frac{-(-١)}{-١} = -١$$

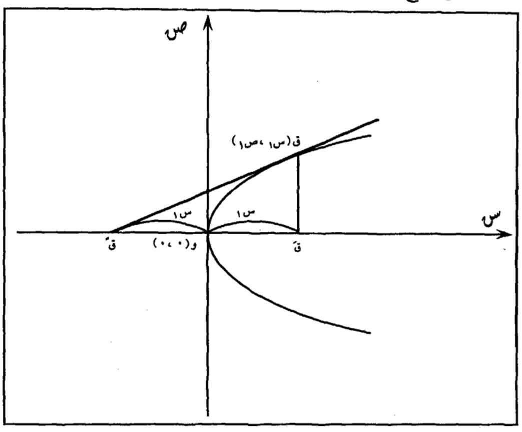
وطـول تحـت العمـود $= \text{ص}_{١} \left|\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}\right|_{(-٣ ، -١)}$

$$= -١ \times -١ = ١$$

(٣ - ١٣) الخواص الهندسية للقطع المكافئ

في هذا الجزء سوف نستعرض بعض الخواص الهندسية للقطع المكافئ

أولاً : رأس القطع المكافئ ينصف تحت المماس لأي نقطة على القطع



شكل (٣ - ٢٠)

البرهان

إذا كانت معادلة القطع $ص^2 = ٤ أ س$

فإن معادلة المماس له عند النقطة ق ($س_1$ ، $ص_1$) هي

$$ص ص_1 = ٢ أ (س + س_1) \qquad (١)$$

والمماس يقطع محور السينات الذي معادلته ص = ٠ في النقطة قَ

بوضع ص = ٠ في (١)

إذن $س + س_١ = ٠$

$س = - س_١$

$|قَ و| = س_١$

ولكن $|و قَ| = س_١$

إذن $|قَ و| = |و قَ|$

أي أن و تنصف تحت المماس قَ قَ وهو المطلوب

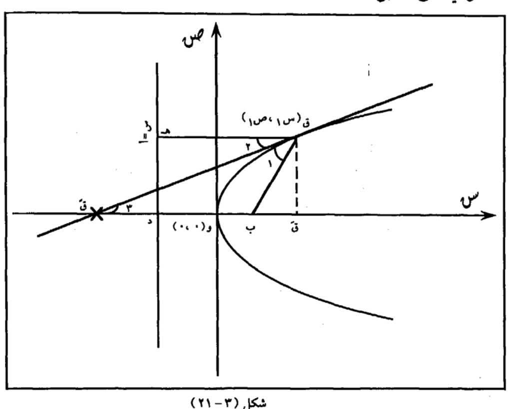
ثانياً : طول تحت المماس لاي نقطة على القطع المكافئ يساوي ضعف الإحداثي السيني للنقطة

البرهان :

من الخاصية الأولى نلاحظ أن

$|قَ ق| = س_١ + س_١ = ٢ س_١$ وهو المطلوب

ثالثاً : المماس عند أي نقطة على القطع متساوي الميل على الوتر البؤري العمودي على الدليل



شكل (٣ – ٢١)

المطلوب في شكل (٣ – ٢١) إثبات أن قياس $\hat{١}$ = قياس $\hat{٢}$

البرهان :

| قَ و | = | و قَ | من الخاصية الأولى

| و ب | = | و د |

بالجمع | قَ و | + | و ب | = | قَ و | + | و د |

قَ ب = قَ د

قَ ب = ق هـ

قَ ب = ق ب

إذن المثلث ق ب قَ متساوي الساقين

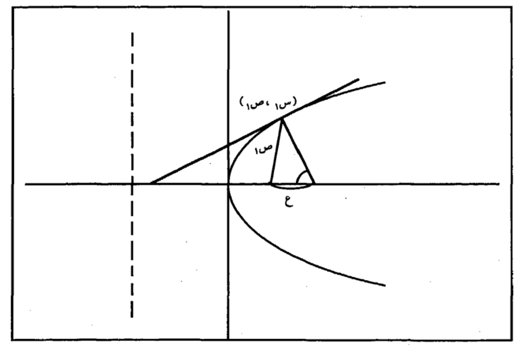
أي أن $\hat{٣} = \hat{١}$

ولكن $\hat{٢} = \hat{٣}$ بالتبادل

إذن $\hat{٢} = \hat{١}$ وهو المطلوب

وللخاصية السابقة أهمية كبيرة في الإضاءة إذا أن القطع المكافيء إذا دار حول محوره يولد سطحاً فإذا وضعنا مصدراً ضوئياً عند بؤرة القطع فإن جميع الأشعة المنعكسة من السطح المعقول من الداخل تكون موازية للمحور ولهذا السبب تصنع المصابيح الكشافة من مثل هذه السطوح الدوارانية

رابعاً : طول تحت العمود لأي نقطة على القطع يساوي طول نصف الوتر البؤري العمودي أي يساوي كمية ثابتة



شكل (٣ - ٢٢)

البرهان :

$ص^2 = 4 أ س$ بإجراء التفاضل

إذن $2 ص \cdot \frac{د ص}{د س} = 4 أ$

$ص \cdot \frac{د ص}{د س} = 2 أ$

وعند النقطة $(س_1 ، ص_1)$

فإن $ص_1 \frac{د ص}{د س} = 2 أ$

وبما أن طول تحت العمود لأي منحنى عند $(س_1 ، ص_1) = ص_1 \cdot \frac{د ص}{د س}$

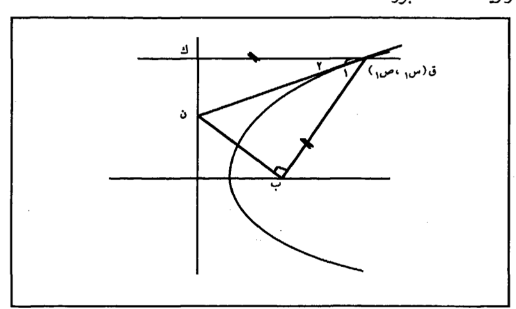
(سبق دراسته في أول البند)

إذن طول تحت العمود = 2 أ

= طول نصف الوتر البؤري العمودي

= مقدار ثابت

خامساً : في القطع المكافئ جزء المماس المحصور بين نقطة التماس والدليل يقابل زاوية قائمة عند البؤرة



شكل (٣ - ٢٣)

البرهان :

في القطع المكافئ ص٢ = ٤ أ س

نفرض النقطة ق (س١ ، ص١)

ونفرض أن المماس ق ن يقابل الدليل في النقطة ن

في المثلثين ق ب ن ، ق ك ن

ق ب = ق ك (من تعريف القطع)

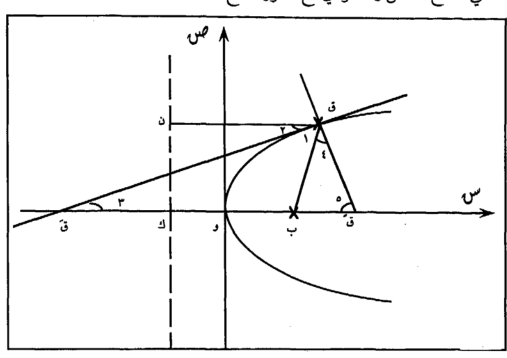
والزاوية المحصورة ١̂ = ٢̂

(المماس ينصف الزاوية المحصورة بين البُعد البؤري للنقطة والمستقيم المار بالنقطة موازياً لمحور القطع) .

إذن ينطبق المثلثان وينتج أن

ق ب̂ ن = ق ك̂ ن = قائمة وهو المطلوب

سادساً : البعد البؤري لنقطة ما على القطع يساوي كلاً من بعدي البؤرة عن نقطتي تقاطع المماس والعمودي مع محور القطع



شكل (٣ - ٢٤)

في القطع المكافئ ص^{٢} = ٤ أ س

ق قَ مماس للقطع عند النقطة ق

ق قً العمودي على المماس عند النقطة ق

المطلوب إثبات أن ق ب = قَ ب = قً ب

البرهان :

$\hat{١}$ = $\hat{٢}$ خواص المماس للقطع

$\hat{٢}$ = $\hat{٣}$ بالتبادل

إذن $\hat{١}$ = $\hat{٣}$.

أي أن المثلث ب ق قَ متساوي الساقين

إذن ب ق = ب قَ (١)

ولكن $\hat{٤} = \hat{٥}$

أي أن المثلث ب ق قً متساوي الساقين

إذن ب ق = ب قً (٢)

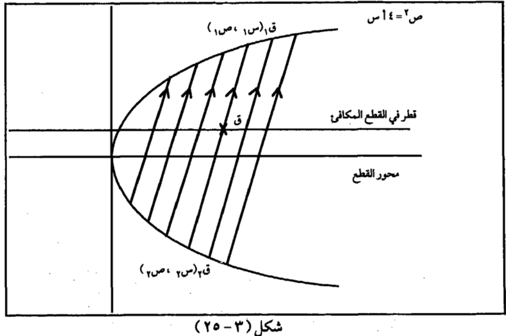
من (١) ، (٢) نجد أن ب ق = ب قَ = ب قً وهو المطلوب

(٣ - ١٤) قطر القطع المكافئ

تعريف :

إذا رسمنا مجموعة من الأوتار المتوازية للقطع المكافئ ص^{٢} = ٤ أ س ذات الميل المشترك م فإن جميع منتصفات هذه الأوتار تقع على خط مستقيم واحد يوازي محور القطع ويسمى بقطر في القطع المكافئ

أو بعبارة أخرى قطر القطع هو مجموعة جميع نقاط منتصفات مجموعة متوازية من الأوتار مرسومة في القطع المكافئ والرسم التالي يوضح هذا التعبير .



شكل (٣ - ٢٥)

نظرية (٣ – ١)

في القطع المكافئ $ص^٢ = ٤ أ س$ تكون منتصفات أي مجموعة من الأوتار المتوازية تقع على مستقيم واحد هو قطر في القطع المكافئ بحيث يكون هذا القطر موازيا لمحور القطع ويبعد عنه مسافة $= \frac{٢ أ}{م}$

(حيث م هو الميل المشترك لمجموعة الأوتار المتوازية)

البرهان :

نفرض أحد هذه الأوتار $ق_١ ق_٢$ حيث $ق_١ \equiv (س_١ ، ص_١)$

، $ق_٢ \equiv (س_٢ ، ص_٢)$

$ق_١$ تقع على القطع أي أن $ص_١^٢ = ٤ أ س_١$ (١)

$ق_٢$ تقع على القطع أي أن $ص_٢^٢ = ٤ أ س_٢$ (٢)

من (١) ، (٢) بالطرح نحصل على

$$ص_١^٢ - ص_٢^٢ = ٤ أ س_١ - ٤ أ س_٢$$

$$(ص_١ - ص_٢) (ص_١ + ص_٢) = ٤ أ (س_١ - س_٢)$$

$$\frac{ص_١ - ص_٢}{س_١ - س_٢} = \frac{٤ أ}{ص_١ + ص_٢} = \frac{٢ أ}{\frac{ص_١ + ص_٢}{٢}}$$

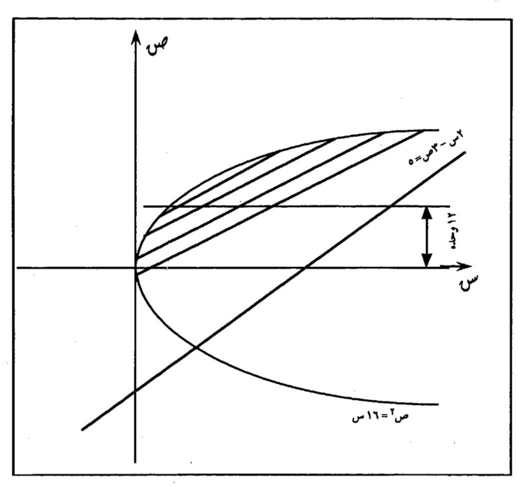
$$م = \frac{٢ أ}{ص_ق} \Leftarrow ص_ق = \frac{٢ أ}{م}$$

وحيث إن م ثابتة

إذن المحل الهندسي لمنتصفات جميع الأوتار المتوازية ذات الميل المشترك م هو مستقيم يوازي محور القطع ويبعد عنه مسافة $\frac{٢ أ}{م}$ وهو المطلوب

مثال (٣ - ٢٢)

أوجد معادلة قطر القطع المكافئ ص^{٢} = ١٦ س والذي ينصف جميع الأوتار التي توازي المستقيم ٢ س - ٣ ص = ٥



شكل (٣ - ٢٦)

ميل المستقيم ٢ س - ٣ ص = ٥

$$هـ م = \frac{-٢}{-٣} = \frac{٢}{٣}$$

وهذا هو الميل المشترك لجميع الأوتار المتوازية

بما أن القطر بوازي محور القطع (محور السينات)

ويبعد عن المحور بمقدار $\frac{٢أ}{م}$ (نظرية)

، و أ = ٤

ويعد القطر عن المحور = $\frac{٢ \times ٤}{\frac{٢}{٣}}$ = ١٢ وحده

إذن القطر // محور السينات ويبعد عنه مسافة قدرها ١٢ وحده

إذن معادلته هي ص = ١٢

تمارين (٣ – ٤)

(عامة على القطع المكافئ)

(١) أوجد الرأس والبؤرة وطول الوتر البؤري العمودي ومعادلة الدليل والمحور ومعادلة المماس عند الرأس لكل من القطوع التالية

أ ـ $ص^٢ = ٣س + ٦$

ب ـ $ص^٢ - ٢ص + ١٠س - ٤ = ٠$

جـ ـ $٣ص^٢ + ٩س + ٤ص = ٠$

(٢) أوجد معادلة القطع المكافئ الذي محوره يوازي محور السينات ويمر بالنقط (٣ ، ٣) ، (٦ ، –٣) ، (٥ ، ٦) ثم أوجد رأس القطع وبؤرته ودليله .

(٣) بوابة على شكل قوس من قطع مكافئ فإذا كان ارتفاعها ٢٥ قدوما وعرض قاعدتها ٤٠ قدم أوجد ارتفاع البوابة عن كل من النقطتين التي تبعد كل منهما عن منصف القاعدة بمقدار ٨ أقدام

(٤) مصباح كشاف في سيارة على شكل مجسم القطع المكافئ الدوراني فإذا كان طول فتحة المقطع = ١٠ بوصة وأكبر عمق له ٦ بوصات فأوجد البعد البؤري للكشاف

(٥) أوجد معادلة المماس والعمودي للقطع المكافئ $س^٢ - ٤ص = ٠$ عند النقطة (٢ ، ١)

(٦) أوجد طول تحت المماس وتحت العمود للمنحنى $ص^٢ = س^٣ + ٢س^٢$ عند النقطة (٢ ، –٤)

(٧) أثبت أن المماسين للقطع المكافئ $ص^٢ = ٤ أ س$ عند طرفي أي وتر في القطع المكافئ يتقاطعان على القطر المنصف لهذا الوتر .

(٨) إثبت أن العمود الساقط من البؤرة على المماس للقطع المكافئ $ص^٢ = ٤ أ س$ يقع على محور الصادات

(٩) أوجد معادلة قطر القطع المكافئ $ص^٢ = ٨ س$ الذي ينصف الأوتار ذات الميل المشترك = $\frac{٢}{٣}$

(١٠) أوجد معادلة قطر القطع $٢ ص^٢ - ٤ س - ٢ ص + ٦ = ٠$

والذي ينصف مجموعة الأوتار التي لها ميل مشترك = $\frac{٢}{٣}$

(١١) إذا قابل مماس القطع $ص^٢ = ٤ أ س$ المحور في قَ والمماس عند الرأس في قً فأوجد الحل الهندسي للنقطة قً

(١٢) تتحرك قذيفة في مستو رأس مبتدئة من نقطة الأصل بحيث كانت إحداثيتها بعد زمن قدره ن هي

$$س = ١٢ ن \quad ، \quad ص = ١٤٤ ن - ١٦ ن^٢$$

برهن على أن المسار هو قطع مكافئ محوره رأسي وأوجد مدى القذيفة على المستوى الأفقي وأكبر ارتفاع تصل إليه القذيفة .

الباب الرابع

القطع الناقص - القطع الزائد

أولاً القطع الناقص

(٤ – ١) معادلة القطع الناقص

(٤ – ٢) الاختلاف المركزي .

(٤ – ٣) الصور القياسية المختلفة لمعادلة القطع الناقص

(٤ – ٤) تعيين الاختلاف المركزي اذا عملت معادلة القطع .

(٤ – ٥) معادلة القطع الناقص الناتجة من انتقال المحاور .

(٤ – ٦) تعيين طول الوتر البؤري العمودي للقطع الناقص

تمارين (٤ – ١)

(٤ – ٧) معادلتا المماس والعمودي للقطع الناقص عند نقطة عليه

(٤ – ٨) شروط تماس المستقيم $ص = م س + حـ$

للقطع الناقص $\frac{س^2}{أ^2} + \frac{ص^2}{ب^2} = 1$

(٤ – ٩) معادلة وتر التماس بالنسبة للقطع الناقص $\frac{س^2}{أ^2} + \frac{ص^2}{ب^2} = 1$

للنقطة $(س_1 ، ص_1)$

(٤ – ١٠) معادلة الخط القطبي بالنسبة للقطع الناقص

$$\frac{س^2}{أ^2} + \frac{ص^2}{ب^2} = 1 \quad \text{للنقطة} \; (س_1 ، ص_1)$$

تمارين (٤ – ٢)

(٤ - ١١) طول تحت المماس وتحت العمودي للقطع الناقص عند النقطة ($س_١$ ، $ص_١$) .

(٤ - ١٢) الخواص الهندسية للقطع الناقص

(٤ - ١٣) قطر القطع الناقص

تمارين (٤ - ٣)

ثانياً : القطع الزائد

(٤ - ١٤) معادلة القطع الزائد

(٤ - ١٥) الصور القياسية المختلفة لمعادلة القطع الزائد

(٤ - ١٦) معادلة القطع الزائد الناتجة من انتقال المحاور .

(٤ - ١٧) تعيين طول الوتر البؤري العمودي للقطع الزائد .

(٤ - ١٨) معادلتا المماس والعمودي للقطع الزائد عند نقطة عليه

(٤ - ١٩) شرط تماس المستقيم ص= م س + حـ للقطع الزائد $\frac{س^٢}{أ^٢} - \frac{ص^٢}{ب^٢} = ١$

(٤ - ٢٠) معادلة وتر التماس بالنسبة للقطع الزائد $\frac{س^٢}{أ^٢} - \frac{ص^٢}{ب^٢} = ١$ للنقطة ($س_١$ ، $ص_١$) .

(٤ - ٢١) معادلة زوج المستقيمان المماسين المرسومين من النقطة ($س_١$ ، $ص_١$) .

(٤ - ٢٢) الخواص الهندسية للقطع الزائد .

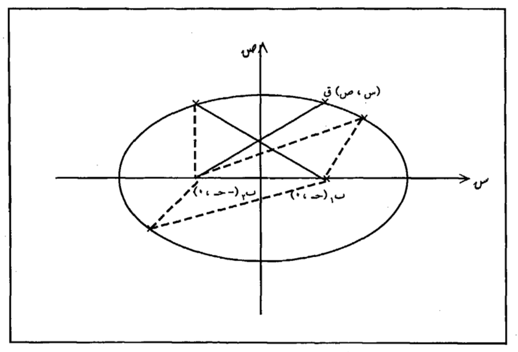
تمارين (٤ - ٤)

الباب الرابع

القطع الناقص - القطع الزائد

أولاً : القطع الناقص

قبل أن نستنتج الصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص علينا أن نتعرف عليه من الوجهة الهندسية



شكل (٤-١)

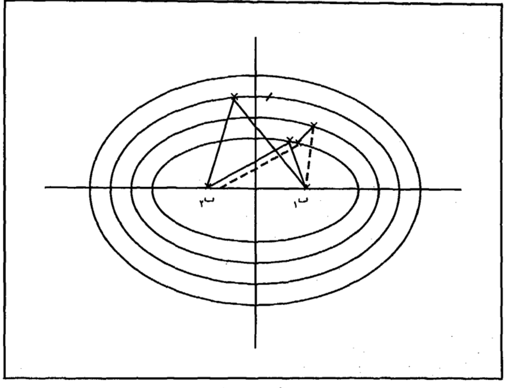
فإذا تحركت نقطة مثل ق (س ، ص) بحيث يكون مجموع بعديها عن نقطتين ثابتتين $ب_١$ ، $ب_٢$ يساوي مقدار ثابت دائما فإنها ترسم منحنى كما هو مبين بالشكل (٤ - ١) نطلق عليه ما يسمى بالقطع الناقص وانطلاقاً من ذلك فإنه يمكن أن نضع له التعريف التالي

تعريف :

إذا فرضنا نقطتين ثابتتين ب $_{١}$ ،ب $_{٢}$ في مستو الإحداثيات فإن مجموعة جميع النقاط التي يكون مجموع بعدي كل منها عن ب $_{١}$ ، ب $_{٢}$ مقداراً ثابتاً هي قطع ناقص بؤريته هما النقطتان ب $_{١}$ ، ب $_{٢}$

أي أن جميع نقاط القطع الناقص الموضح بالشكل (٤ - ١) تحقق العلاقة

|ق ب $_{١}$| + |ق ب $_{٢}$| = ٢ أ حيث أ مقدار ثابت



شكل (٤ -٢)

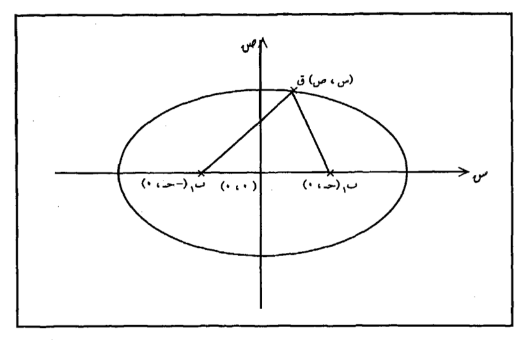
وواضح إن تغيرت قيمة أ فإن القطع يتغير رغم ثبوت البؤرتين

مجموعة القطاعات الناقصة الموضحة بالشكل (٤ - ٢) تتحد في البؤرتين ب $_{١}$ ، ب $_{٢}$ ولكنها تختلف جميعاً في قيمة أ والتي يعرف ضعفها (٢ أ) ثابت مجموع البعدين البؤرين لأي نقطة على القطع الناقص

(٤ – ١) معادلة القطع الناقص

ولتعيين معادلة القطع الناقص بمعلومية البؤرتين $ب_١ \equiv (حـ ، ٠)$ ، $ب_٢ \equiv (-حـ ، ٠)$

وثابت مجموع البعدين البؤرين لأي نقطة على القطع وليكن ٢أ



شكل (٤ –٣)

بفرض النقطة ق (س ،ص) أي نقطة على منحنى القطع اذن من تعريف القطع الناقص نجد أن $|ق ب_١| + |ق ب_٢| = ٢ أ$

$$\sqrt{(س - حـ)^٢ + ص^٢} + \sqrt{(س + حـ)^٢ + ص^٢} = ٢أ$$

$$\sqrt{(س + حـ)^٢ + ص^٢} = ٢ أ - \sqrt{(س - حـ)^٢ + ص^٢}$$

بتربيع الطرفين

$$(س + حـ)^٢ + ص^٢ = ٤ أ^٢ - ٤ أ \sqrt{(س - حـ)^٢ + ص^٢} + (س - حـ)^٢ + ص^٢$$

$$س^٢ + ٢ حـ س + حـ^٢ + ص^٢ = ٤ أ^٢$$

$$- ٤ أ \sqrt{(س - حـ)^٢ + ص^٢} + س^٢ - ٢ حـ س + حـ^٢ + ص^٢$$

$$٤ حـ س - ٤ أ^٢ = - ٤ أ \sqrt{(س - حـ)^٢ + ص^٢}$$

بتربيع الطرفين

$$(حـ - أ^٢)^٢ = أ^٢ [(س - حـ)^٢ + ص^٢]$$

$$حـ^٢ س^٢ - ٢ أ^٢ حـ س + أ^٤ = أ^٢ [س^٢ - ٢ حـ س + حـ^٢ + ص^٢]$$

$$حـ^٢ س^٢ - ٢ أ^٢ حـ س + أ^٤ = أ^٢ س^٢ - ٢ أ^٢ حـ س + أ^٢ حـ^٢ + أ^٢ ص^٢$$

$$أ^٢ س^٢ - حـ^٢ س^٢ + أ^٢ ص^٢ = أ^٤ - أ^٢ حـ^٢$$

$$(أ^٢ - حـ^٢) س^٢ + أ^٢ ص^٢ = أ^٢ (أ^٢ - حـ^٢)$$

بقسمة الطرفين على $أ^٢ (أ^٢ - حـ^٢)$

$$\frac{س^٢}{أ^٢} + \frac{ص^٢}{أ^٢ - حـ^٢} = ١$$

يوضح $أ^٢ - حـ^٢ = ب^٢$

تصبح معادلة القطع

$$\frac{س^٢}{أ^٢} + \frac{ص^٢}{ب^٢} = ١$$

وتعرف هذه المعادلة بالصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص .

وواضح أنه إذا علمت معادلة القطع الناقص في الصورة

$$\frac{س^٢}{أ^٢} + \frac{ص^٢}{ب^٢} = ١$$

فإن مركز القطع هو و (٠ ، ٠)

كما يمكن إيجاد بؤرتيه اذا علمت قيمة حـ حيث بؤرتي القطع هما

$ب_1$ (حـ ، ٠) ، $ب_2$ (−حـ ، ٠)

ولتعيين حـ من الفرض أن $ب^2 = أ^2 - حـ^2$

إذن $حـ^2 = أ^2 - ب^2$

وبالتالي فإن قيمة $حـ = \sqrt{أ^2 - ب^2}$

وتكون بؤرتي القطع هما

$ب_1$ ($\sqrt{أ^2 - ب^2}$ ، ٠) ، $ب_2$ (−$\sqrt{أ^2 - ب^2}$ ، ٠)

مثال (٤ − ١)

إذا كانت معادلة القطع

$$\frac{س^2}{٢٥} + \frac{ص^2}{١٦} = ١$$

فإن : (١) مركز القطع هو النقطة (٠ ، ٠)

(٢) لتعين بؤرتي القطع

بما أن $حـ^2 = أ^2 - ب^2$

$= ٢٥ - ١٦ = ٩$

إذن $حـ = \pm ٣$

وبالتالي فإن بؤرتي القطع هما (٣ ، ٠) ، (−٣ ، ٠)

(٤ - ٢) الاختلاف المركزي

ويمكن أيضاً تعريف القطع الناقص تعريفاً مختلفاً عن التعريف السابق وذلك باستخدام ما يعرف بالاختلاف المركزي (هـ)

فإذا تحركت نقطة في مستو معلوم فإن النسبة بين بعدها عن نقطة ثابتة في هذا المستوى (البؤرة) وبعدها عن مستقيم ثابت في المستوى (الدليل) نسبة ثابتة تسمى بالاختلاف المركزي .

والاختلاف المركزي هو الرابط المشترك والذي يوضح الفرق بين القطوع الثلاثة المكافئ والناقص والزائد

فإذا تحركت نقطة ما بحيث هـ = ١

فإنها ترسم قطعاً مكافئاً

فإذا تحركت النقطة بحيث هـ < ١

فإنها ترسم قطعاً ناقصاً

فإذا تحركت نقطة ما بحيث هـ > ١

فإنها ترسم قطعاً زائداً

وعلى ذلك فإننا نكتب التعريف الآخر للقطع الناقص كما يلي

تعريف :

يعرف القطع الناقص بأنه مجموعة جميع النقاط في مستوى معلوم بحيث أن الاختلاف المركزي أقل من الواحد الصحيح

ومن الممكن أن نستنتج معادلة القطع الناقص أيضاً باستخدام هذا التعريف .

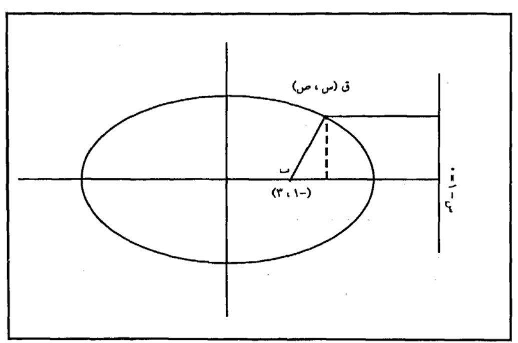
(يترك كتمرين)

مثال (٤ - ٢) :

أوجد معادلة القطع الناقص الذي بؤرته (- ١ ، ٣) ودليله س - ١ = ٠

واختلاف المركزي $= \frac{١}{٣}$

الحـــل :



شكل (٤ - ٤)

نفرض النقطة ق (س ، ص) على القطع المكافئ

$$\frac{|\text{ق ب}|}{\text{ع}} = \frac{١}{٣}$$

$$|\text{ق ب}| = \frac{١}{٣}\,\text{ع}$$

$$\sqrt{(\text{س} + ١)^{٢} + (\text{ص} - ٣)^{٢}} = \frac{١}{٣}\;\frac{|\text{س} - ١|}{\sqrt{٢}}$$

$$\text{س}^{٢} - ٢\,\text{س} + ١ + \text{ص}^{٢} - ٦\,\text{ص} + ٩ = \frac{١}{٩} \times \frac{\text{س}^{٢} - ٢\,\text{س} + ١}{٢}$$

$$١٨\,\text{س}^{٢} - ٣٦\,\text{س} + ١٨ + ١٨\,\text{ص}^{٢} - ١٠٨\,\text{ص} + ١٦٢ = \text{س}^{٢} - ٢\,\text{س} + ١$$

$$١٧\,\text{س}^{٢} - ٣٤\,\text{س} + ١٨\,\text{ص}^{٢} - ١٠٨\,\text{ص} + ١٨٩ = ٠$$

هي معادلة القطع الناقص المطلوبة

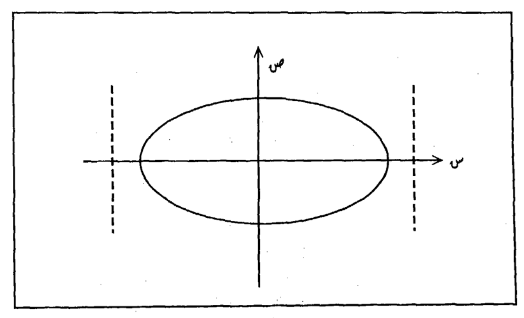
(٤ - ٣) الصور القياسية المختلفة لمعادلة القطع الناقص

نتناول في هذا الجزء الصور القياسية المختلفة لمعادلة القطع الناقص تبعاً لوضع المحور الاكبر والمحدود الاصغر بالنسبة لمحاور الاحداثيات

أولا : $$\frac{\text{س}^{٢}}{\text{أ}^{٢}} + \frac{\text{ص}^{٢}}{\text{ب}^{٢}} = ١$$

حيث أ > ب

فيه المحور الأكبر ينطبق على محور السينات والمحور الأصغر ينطبق على محور الصادات



شكل (٤ -٥)

ثانياً : $\frac{ص^2}{أ^2} + \frac{س^2}{ب^2} = 1$

وفيه المحور الأكبر ينطبق على محور الصادرات والمحور الاصغر ينطبق على محور السينات

شكل (٤ -٦)

(٤ – ٤) تعين الاختلاف المركزي إذا علمت معادلة القطع

في الصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص

$\frac{س^2}{أ^2} + \frac{ص^2}{ب^2} = 1$ بوضع س = ٠

فإن ص = ± ب أي أن القطع الناقص يقطع محور الصادرات

في نقطتين $ق_1$ ، $ق_2$ في جهتين مختلفتين من محور السينات ويبعدان عن نقطة الأصل مسافة قدرها ب = أ$\sqrt{1 - هـ^2}$

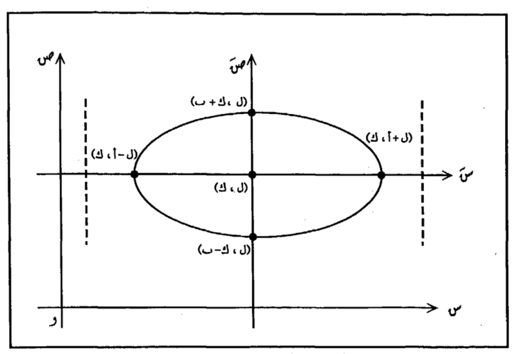
$$ب^2 = أ^2 \,(1 - هـ^2)$$

$$\frac{ب^2}{أ^2} = 1 - هـ^2$$

$$هـ^2 = 1 - \frac{ب^2}{أ^2}$$

$$هـ = \sqrt{1 - \frac{ب^2}{أ^2}}$$

(٤ – ٥) معادلة القطع الناقص الناتجة من انتقال المحاور



شكل (٤ –٧)

المعادلة $\frac{(س - ل)^{٢}}{أ^{٢}} + \frac{(ص - ك)^{٢}}{ب^{٢}} = ١$

تمثل قطعاً ناقصاً له الخواص التالية :

(١) مركزه هو النقطة (ل ، ك)

(٢) معادلة محوره الأكبر ص = ك (يوازي محور السينات)

(٣) معادلة محوره الأصغر س = ل (يوازي محور الصادات)

(٤) طرفا المحور الأكبر هما (ل + أ ، ك) ، (ل – أ ، ك)

(٥) طرفا المحور الأصغر هما (ل ، ك + ب) ، (ل ، ك – ب)

(٦) بؤرتاه هما (ل + هـ أ ، ك) ، (ل – هـ أ ، ك)

حيث هـ هي الاختلاف المركزي للقطع

(٧) معادلة الدليل

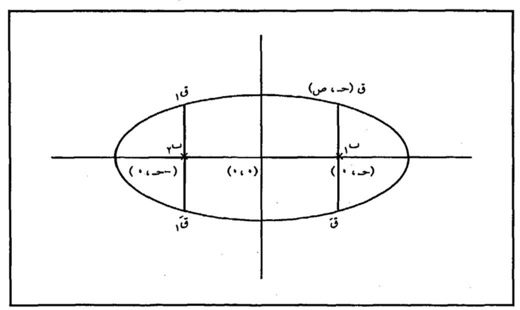
$$س = ل - \frac{أ}{هـ}$$

، $$س = ل + \frac{أ}{هـ}$$

ونلاحظ أنه إذا كان محوري القطع موازيان لمحور الاحداثيات فإن الصورة العامة لمعادلة القطع الناقص تكون

$$أ\ س^{٢} + ب\ ص^{٢} + ٢\ ل\ س + ٢\ ك\ ص + حـ = ٠$$

(٤ - ٦) تعيين طول الوتر البؤري العمودي للقطع الناقص :



شكل (٤ -٨)

في الشكل الموضح (٤ - ٨) إذا رسمنا وتر بؤريا عموديا مثل ق قَ

أو $ق_{١}قَ_{١}$ في القطع الناقص $\frac{س^{٢}}{أ^{٢}} + \frac{ص^{٢}}{ب^{٢}} = ١$

فإن الإحداثي السيني للنقطة ق هو حـ أيضاً

أي أن إحداثيات ق هي (حـ ، ص)

وبما أن النقطة ق تقع على منحنى القطع اذن تحقق معادلته وبالتالي فإن

$$\frac{\text{حـ}^2}{\text{أ}^2} + \frac{\text{ص}^2}{\text{ب}^2} = 1$$

$$\frac{\text{ص}^2}{\text{ب}^2} = 1 - \frac{\text{حـ}^2}{\text{أ}^2}$$

$$= \frac{\text{أ}^2 - \text{حـ}^2}{\text{أ}^2}$$

$$= \frac{\text{ب}^2}{\text{أ}^2}$$

$$\text{ص}^2 = \frac{\text{ب}^4}{\text{أ}^2}$$

$$\text{ص} = \frac{\text{ب}^2}{\text{أ}}$$

إذن طول الوتر البؤري العمودي = ٢ ص = $\frac{2\,\text{ب}^2}{\text{أ}}$

مثال : (٤ - ٣) :

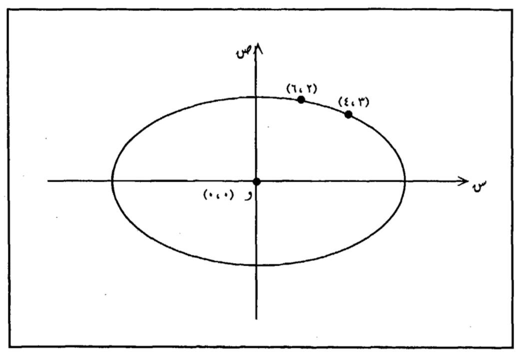
أوجد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل ومحوره الأكبر على محور السينات بالنقطة (٤ ، ٣) ، (٦ ، ٢) - ثم أوجد كلاً من :

(أ) اختلافة المركزي

(ب) بؤرتي القطع .

(حـ) معادلتا دليليه

الحـــل :



شكل (٤ -٩)

نفرض أن معادلة القطع في الصورة القياسية

$$\frac{س^2}{أ^2} + \frac{ص^2}{ب^2} = ١$$ (قطع ناقص مركزه نقطة الأصل)

بما أن النقطة (٤ ، ٣) تقع على القطع إذن تحقق معادلته

$$\frac{١٦}{أ^٢} + \frac{٩}{ب^٢} = ١ \qquad (١)$$

، النقطة (٦ ، ٢) تقع على القطع إذن تحقق معادلته

$$\frac{٣٦}{أ^٢} + \frac{٤}{ب^٢} = ١ \qquad (٢)$$

بضرب (١) × ٤ ، (٢) × ٩

$$\frac{-٦٤}{أ^٢} + \frac{٣٦}{ب^٢} = -٤$$

$$\frac{٣٢٤}{أ^٢} + \frac{٣٦}{ب^٢} = ٩$$

بالطرح نحصل على

$$\frac{٢٦٠}{أ^٢} = ٥$$

$$٥ أ^٢ = ٢٦٠ \Leftarrow أ^٢ = ٥٢$$

بالتعويض في (١)

$$\frac{١٦}{٥٢} + \frac{٩}{ب^٢} = ١$$

$$\frac{٩}{ب^٢} = \frac{٣٦}{٥٢}$$

$$ب^٢ = \frac{٥٢}{٤} = ١٣$$

إذن معادلة القطع هي

$$\frac{س^{٢}}{٥٢} + \frac{ص^{٢}}{١٣} = ١$$

أي $$س^{٢} + ٤ ص^{٢} = ١$$

(أ) لإيجاد الاختلاف المركزي

$$هـ^{٢} = ١ - \frac{ب^{٢}}{أ^{٢}}$$

$$= ١ - \frac{١٣}{٥٢} = ١ - \frac{١}{٤}$$

$$= \frac{٣}{٤}$$

$$هـ = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$$

(ب) لتعيين بؤرتيه $$حـ^{٢} = أ^{٢} - ب^{٢}$$

$$= ٥٢ - ١٣ = ٣٩$$

البؤرتين هما $(\sqrt{٣٩} ، ٠)$ ، $(-\sqrt{٣٩} ، ٠)$

(حـ) لإيجاد معادلتا دليلا القطع

$$س = \pm \frac{أ}{هـ}$$

بالتعويض $$س = \pm \frac{٢\sqrt{٥٢}}{٣}$$

$$س = \pm \frac{٤\sqrt{١٣}}{٣}$$

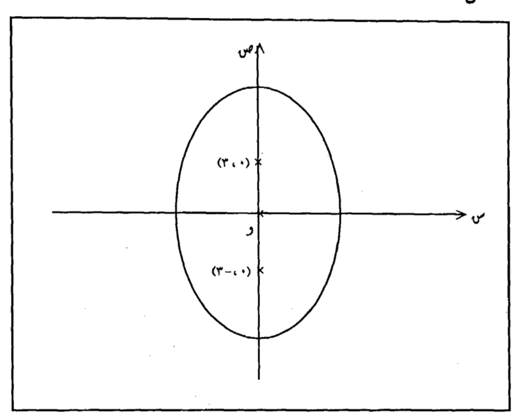
اذن الدليلين هما $ل_{١} = \{ (س ، ص) : س - \frac{٢\sqrt{٥٢}}{٣} = ٠ \}$

، $ل_{٢} = \{ (س ، ص) : س + \frac{٢\sqrt{٥٢}}{٣} = ٠ \}$

مثال (٤ - ٤)

أوجد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وإحدى بؤرتيه (٠ ، ٣) وطول نصف محورة الأكبر = ٥ ثم أوجد معا دلتا دليليه

الحــل :



شكل (٤ - ١٠)

بما أن المركز هو نقطة الأصل والبؤرة تقع على محور السينات إذن المحور الأكبر ينطبق على محور السينات ، والمحور الأصغر ينطبق على محور الصادات

نفرض أن معادلة القطع هي

$$\frac{س^٢}{ب^٢} + \frac{ص^٢}{أ^٢} = ١ \qquad أ > ب \text{ كما عرفناها سابقا}$$

نصف طول المحور الأكبر $أ = ٥$ $أ^٢ = ٢٥$

وبما أن $أ^٢ - ب^٢ = حـ$

$٢٥ - ب^٢ = ٩$

إذن $ب^٢ = ٢٥ - ٩ = ١٦$

وبالتالي فإن معادلة القطع في الصورة $\frac{س^٢}{١٦} + \frac{ص^٢}{٢٥} = ١$

الاختلاف المركزي $هـ = \sqrt{١ - \frac{ب^٢}{أ^٢}}$

$= \sqrt{١ - \frac{١٦}{٢٥}}$

$= \sqrt{\frac{٩}{٢٥}} = \frac{٣}{٥}$

من معادلتا الدليلين $ص = \pm \frac{أ}{هـ}$

$ص = \pm \frac{٥}{\frac{٣}{٥}}$

إذن الدليلين هما $ل_١ = \{ (س ، ص) : ص - \frac{٢٥}{٣} = ٠ \}$

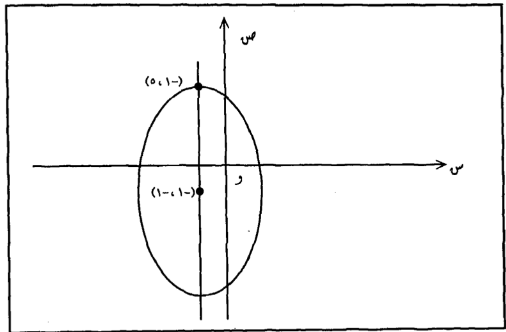
$ل_٢ = \{ (س ، ص) : ص + \frac{٢٥}{٣} = ٠ \}$

مثال (٤ – ٥) :

أوجد معادلة القطع الناقص الذي مركزه (– ١ ، –١)

وأحد رؤوسه هـو النقطة (– ١ ، ٥) واختلافه المركزي $\frac{١}{٣}$

الحـل :



شكل (٤ –١١)

بما أن مركز القطع هو النقطة (–١ ، – ١) ، وأحد رؤوسه (– ١ ، ٥)

إذن محوره الأكبر يوازي محور الصادات ويبعد عنه بمسافة = – ١ ،

ومعادلته هي س = – ١

ويكون طول نصف المحور الأكبر أ = ٥ – (– ١) = ٦ وحدات

ولكن من العلاقة بين أ ، ب والاختلاف المركزي هـ

نجد أن $هـ^{٢} = ١ - \frac{ب^{٢}}{أ^{٢}}$

$$\frac{٤}{٩} = ١ - \frac{ب^{٢}}{٣٦}$$

$$\frac{\text{ب}^{٢}}{٣٦} = ١ - \frac{٤}{٩}$$

$$\frac{\text{ب}^{٢}}{٤} = ٥$$

$$\text{ب}^{٢} = ٢٠$$

من معادلة القطع الناقص في الصورة $\frac{(\text{س} - \text{ل})^{٢}}{\text{أ}^{٢}} + \frac{(\text{ص} - \text{ك})^{٢}}{\text{ب}^{٢}} = ١$

إذن معادلة القطع المطلوبة . هي $\frac{(\text{س} + ١)^{٢}}{٣٦} + \frac{(\text{ص} + ١)^{٢}}{٢٠} = ١$

$$٥\ \text{س}^{٢} + ٩\ \text{ص}^{٢} + ١٠\ \text{س} + ١٨\ \text{ص} - ١٦٦ = ٠$$

مثال (٤ – ٦) :

ضع معادلة القطع الناقص

$$\text{س}^{٢} + ٤\ \text{ص}^{٢} - ٢\ \text{س} - ١٦\ \text{ص} + ٨ = ٠$$

في الصورة القياسية ومن ثم أوجد كلاً من :

(أ) إحداثيات طرفي كلاً من المحورين الأكبر والأصغر .

(ب) الاختلاف المركزي

الحـــل :

باستخدام إكمال المربع (نظراً لحدوث انتقال للمحاور) يمكن تحويل معادلة القطع الناقص من الصورة العامة إلى الصورة القياسية كما يلي

$$(\text{س}^{٢} - ٢\ \text{س} + ١) - ١ + (٤\ \text{ص}^{٢} - ١٦\text{ص} + ١٦) - ١٦ + ٨ = ٠$$

$$(س - ١)^٢ + ٤ (ص - ٢)^٢ - ٩ = ٠$$

$$(س - ١)^٢ + ٤ (ص - ٢)^٢ = ٩$$ بالقسمة على ٩

$$\frac{(س - ١)^٢}{٩} + \frac{٤ (ص - ٢)^٢}{٩} = ١$$

$$\frac{(س - ١)^٢}{٩} + \frac{(ص - ٢)^٢}{\frac{٩}{٤}} = ١$$

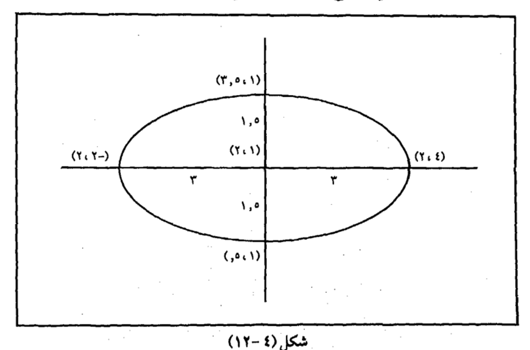
وبنقل المحاور الى النقطة (١ ، ٢) $$\frac{\bar{س}^٢}{٩} + \frac{\bar{ص}^٢}{\frac{٩}{٤}} = ١$$

وهذه معادلة قطع ناقص مركزه (١ ، ٢) ،

حيث $أ^٢ = ٩ \Leftarrow أ = ٣$ إذن طول المحور الاكبر = ٦

، $ب^٢ = \frac{٩}{٤} \Leftarrow ب = \frac{٣}{٢}$ إذن طول المحور الأصغر = ٣

وبالنظر الى الشكل الآتي يوضح كيفية تعين طرفي المحورين



شكل (٤ -١٢)

(أ) إحداثيات طرفي المحور الأكبر هما (٤ ، ٢) ، (−٢ ، ٢) ،

وإحداثيات طرفي المحور الأصغر هما (١ ، ٣,٥) ، (١ ، ٥,)

(ب) الاختلاف المركزي بما أن $هـ^٢ = ١ - \frac{ب^٢}{أ^٢}$

$= ١ - \frac{\frac{٩}{٤}}{٩} = ١ - \frac{١}{٤} = \frac{٣}{٤}$

إذن $هـ = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

مثال (٤ – ٧) :

أوجد مركز وبؤرتي القطع

$٥ س^٢ + ٩ ص^٢ - ٢٠ س - ١٨ ص - ١٦ = ٠$

الحـــل :

باستخدام إكمال المربع نضع المعادلة في الصورة

$\frac{(س - ل)^٢}{أ^٢} + \frac{(ص - ك)^٢}{ب^٢} = ١$

كما يلي :

$(٥ س^٢ - ٢٠ س + ٢٠) - ٢٠ + (٩ ص^٢ - ١٨ ص + ٩) - ٩ - ١٦ = ٠$

$٥ (س^٢ - ٤ س + ٤) + ٩ (ص^٢ - ٢ ص + ١) - ٤٥ = ٠$

$٥ (س - ٢)^٢ + ٩ (ص - ١)^٢ = ٤٥$

بالقسمة على ٤٥

$\frac{(س - ٢)^٢}{٩} + \frac{(ص - ١)^٢}{٥} = ١$

وهذه معادلة قطع ناقص مركزه (٢ ، ١)

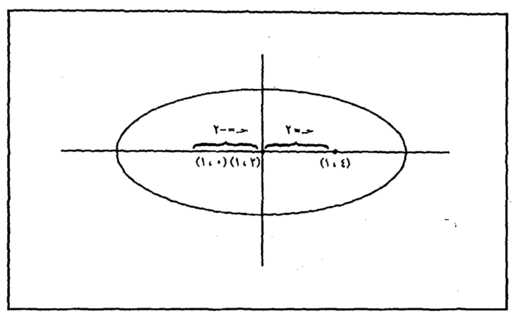
ولتعيين إحداثيات البؤرتين $\text{حـ}^{٢} = \text{أ}^{٢} - \text{ب}^{٢}$

$= ٩ - ٥ = ٤$

$\text{حـ} = \pm ٢$

إذن البؤرتين هما (٤ ، ١) ، (٠ ، ١)

والرسم يوضح كيفية تعيين البؤرة



شكل (٤ -١٣)

ويمكن أيضاً تعيين البؤرتين عن طريق تحديد الاختلاف المركزي واستخدامه في ذلك كما يلي

بما أن $\text{أ}^{٢} = ٩$ ، $\text{ب}^{٢} = ٥$

، $\text{هـ}^{٢} = ١ - \frac{\text{أ}^{٢}}{\text{ب}^{٢}}$

$= ١ - \frac{٥}{٩} = \frac{٤}{٩}$

إذن $هـ = \frac{٢}{٣}$

إذن إحداثيات البؤرة هي (ل ± أ هـ ، ك)

أي $(٢ \pm ٣ \times \frac{٢}{٣} ، ١)$

أي أن $ب_{١} \equiv (٤ ، ١)$ ، $ب_{٢} \equiv (٠ ، ١)$

مثال (٤ – ٨) :

ارسم القطع الناقص

$$١٦ س^{٢} + ٢٥ ص^{٢} - ٦٤ س - ٢٢٥ ص - ١١١ = ٠$$

الحـــل :

بإكمال المربع

$$(١٦ س^{٢} - ٦٤ س + ٦٤) - ٦٤$$

$$+ (٢٥ ص^{٢} - ٢٢٥ ص + ٢٢٥) - ٢٢٥ - ١١١ = ٠$$

$$١٦ (س^{٢} - ٤ س + ٤) + ٢٥ (ص^{٢} - ٩ ص + ٩) = ٤٠٠$$

$$١٦ (س - ٢)^{٢} + ٢٥ (ص - ٣)^{٢} = ٤٠٠$$

بالقسمة على ٤٠٠

$$\frac{(س - ٢)^{٢}}{٢٥} + \frac{(ص - ٣)^{٢}}{١٦} = ١$$

وهذه معادلة قطع ناقص

(١) مركزه النقطة (٢ ، ٣)

(٢) أ = ٥ $\Leftarrow$ طول المحور الأكبر = ١٠

ب = ٤ $\Leftarrow$ طول المحور الأصغر = ٤

والمحور الأكبر يوازي محور السينات ومعادلته ص = ٣

والمحور الأصغر يوازي محور الصادات ومعادلته س = ٢

(٣) طرفا المحور الأكبر هما (ل + أ ، ك) ، (ل - أ ، ك)
(٧ ، ٣) ، (-٣ ، ٣)

(٤) طرفا المحور الأصغر هما (ل ، ك + ب) ، (ل ، ك - ب)
(٢ ، ٧) ، (٢ ، - ١)

(٦) بؤرتا القطع لتعيين بؤرتا القطع نعين قيمة حـ

$$حـ^2 = أ^2 - ب^2$$

= ٢٥ - ١٦ = ٩ حـ = ± ٣

$ب_1 \equiv (٥ ، ٣) ، ب_2 \equiv (-١ ، ٣)$

(٧) باستخدام طول الوتر البؤري العمودي يمكن إيجاد إحداثيات أربع نقاط هما طرفي كل من الوترين البؤريين

طول الوتر البؤري العمودي $= \frac{٢ ب^2}{أ} = \frac{٢ \times ١٦}{٥} = \frac{٣٢}{٥} = ٦,٤$

ويكون الأطراف الأربعة للوترين البؤريين هما النقط

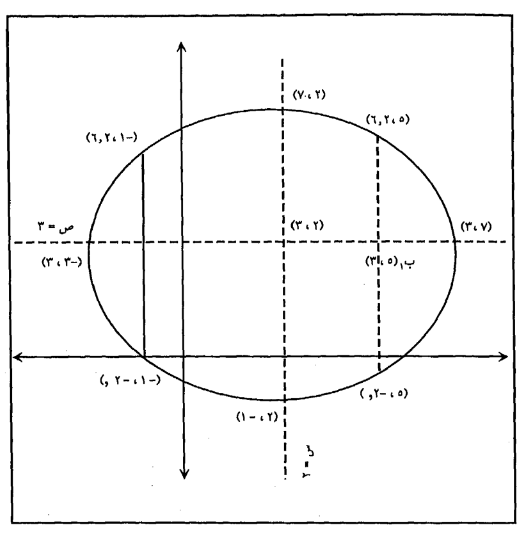
(٥ ، ٦,٢) ، (٥ ، -٢,) ، (-١ ، ٦,٢) ، (-١ ، -٢,)

(٨) يمكن الحصول على نقط أخرى على القطع الناقص

بوضع ص = ٠ وتعيين نقط تقاطع القطع مع محور السينات

وبوضع س = ٠ وتعيين نقط تقاطع القطع مع محور الصادات

من المعلومات السابقة يكون الشكل العام للقطع كما يلي :



شكل (٤ -١٤)

تمارين (٤ – ١)

(١) أوجد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل ومحوره الأكبر ينطبق على محور السينات في كل من الحالات التالية :

أ ـ إذا مرَّ بالنقطتين (٣ ، ٣) ، (٢ ، ٤)

ب ـ إذا كان اختلافه المركزي = $\frac{٣}{٥}$ وطول محوره الأكبر يساوي ٥

حـ ـ طول وتره البؤري العمودي = $\frac{١٦}{٥}$ واختلافه المركزي = $\frac{١}{٥}$

(٢) أوجد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل ومحوريه ينطبقان على محوري الإحداثيات في الحالات التالية :

أ - إذا كانت بؤرتيه (± ٤ ، ٠) ورأسيه (± ٥ ، ٠)

ب - إذا كانت بؤرتيه (± ٥ ، ٠) واختلافه المركزي $\frac{٥}{٨}$

حـ - إذا كانت بؤرتيه (٠ ، ± ٦) ونصف محوره الأصغر ٨

(٣) أوجد مركز وبؤرتي ودليلي ورأس القطع

$٤ س^٢ + ٦ ص^٢ - ٨ س - ٥ = ٠$

ثم أوجد أيضاً معادلة المحورين

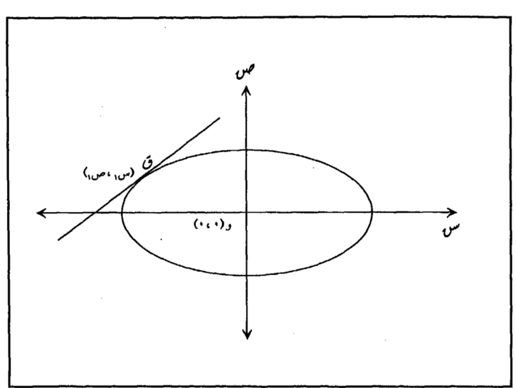
(٤) أوجد معادلة القطع الناقص الذي مركزه (٣ ، ١) وأحد رأسيه (٣ ، – ٢) واختلافه المركزي $\frac{١}{٣}$

(٥) أوجد معادلة القطع الذي بؤرته (–١ ، –١) والدليل المناظر لها هو س = ٠ والاختلاف المركزي $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ ثم أوجد مركزه وبؤرته الثانية والدليل المناظر لها .

(٦) ارسم القطع الناقص $\frac{(س - ٢)^٢}{٤} + (ص - ١)^٢ = ١$

(٧) ارسم القطع الناقص $٤ س^٢ + ص^٢ - ٢ ص - ٣ = ٠$

(٤ – ٧) : معادلتا المماس والعمودي للقطع الناقص عند نقطة عليه :



شكل (٤ – ١٥)

نفرض النقطة ق (س١ ، ص١) تقع على منحنى القطع الناقص الذي معادلته

$$\frac{س^2}{أ^2} + \frac{ص^2}{ب^2} = 1$$

بإجراء التفاضل

$$\frac{2\,س}{أ^2} + \frac{2\,ص}{ب^2}\,\frac{د\,ص}{د\,س} = 0$$

$$\frac{2\,ص}{ب^2}\,\frac{د\,ص}{د\,س} = -\frac{2\,س}{أ^2}$$

$$\frac{د\,ص}{د\,س} = -\frac{2\,س}{أ^2} \times \frac{ب^2}{2\,ص}$$

بما أن م ميل المماس عند النقطة $(س_١ ، ص_١)$ $= \left.\frac{د ص}{د س}\right|_{\substack{س = س_١ \\ ص = ص_١}}$

$$= - \frac{س_١}{أ^٢} \times \frac{ب^٢}{ص_١}$$

إذن معادلة المماس عند النقطة $(س_١ ، ص_١)$ هي

$$ص - ص_١ = - \frac{س_١}{أ^٢} \times \frac{ب^٢}{ص_١} (س - س_١)$$

$$أ^٢ ص_١ (ص - ص_١) \quad = - ب^٢ س_١ (س - س_١)$$

$$أ^٢ ص ص_١ - أ^٢ ص_١^٢ \quad = - ب^٢ س س_١ + ب^٢ س_١^٢$$

$$أ^٢ ص ص_١ + ب^٢ س س_١ = ب^٢ س_١^٢ + أ^٢ ص_١^٢$$

بالقسمة على $أ^٢ ب^٢$ وتصبح معادلة المماس

$$\frac{ص ص_١}{ب} + \frac{س س_١}{أ^٢} = \frac{س_١^٢}{أ^٢} + \frac{ص_١^٢}{ب^٢}$$

وبما أن $(س_١ ، ص_١)$ تحقق معادلة القطع الناقص إذن الطرف الأيسر في المعادلة السابقة = ١

وبالتالي فإن معادلة المماس هي :

$$\frac{س س_١}{أ^٢} + \frac{ص ص_١}{ب^٢} = ١$$

ويكون ميل العمودي $= \frac{أ^٢}{س_١} \times \frac{ص_١}{ب^٢}$

معادلة العمودي هي $ص - ص_1 = \frac{أ^2 ص_1}{ب^2 س_1} (س - س_1)$

$$\Leftarrow ص - ص_1 = \frac{\frac{ص_1}{ب^2}}{\frac{س_1}{أ^2}} (س - س_1)$$

إذن معادلة العمودي هي $\frac{ص - ص_1}{\frac{ص_1}{ب^2}} = \frac{س - س_1}{\frac{س_1}{أ^2}}$

نتيجة :

معادلة المماس للقطع الناقص $\frac{(س - ل)^2}{أ^2} + \frac{(ص - ك)^2}{ب^2} = 1$

عند النقطة $(س_1 ، ص_1)$ هي

$$\frac{(س - ل)(س_1 - ل)}{أ^2} + \frac{(ص - ك)(ص_1 - ك)}{ب^2} = 1$$

ويمكن استنتاج هذه المعادلة باتباع نفس الخطوات المستخدمة في البند (٤ – ٧) .

(٤ – ٨) شرط تماس المستقيم ص = م س + حـ للقطع الناقص

$$\frac{س^2}{أ^2} + \frac{ص^2}{ب^2} = 1$$

من معادلة المستقيم ص = م س + حـ

وبالتعويض في معادلة المنحنى نحصل على

$$\frac{س^2}{أ^2} + \frac{(م س + جـ)^2}{ب^2} = 1$$

بالضرب × (أ^{٢} ب^{٢})

ب^{٢} س^{٢} + أ^{٢} (م س + حـ)^{٢} = أ^{٢} ب^{٢}

ب^{٢} س^{٢} + أ^{٢} (م^{٢} س^{٢} + ٢ م حـ س + حـ^{٢}) = أ^{٢} ب^{٢}

ب^{٢} س^{٢} + أ^{٢} م^{٢} س^{٢} + ٢ أ^{٢} م حـ س + أ^{٢} حـ^{٢} − أ^{٢} ب^{٢} = ٠

(ب^{٢} + أ^{٢} م^{٢}) س^{٢} + ٢ أ^{٢} م حـ س + أ^{٢} (حـ^{٢} − ب^{٢}) = ٠ (١)

وهذه معادلة من الدرجة الثانية في س

ولكي يمس المستقيم القطع الناقص يكون مميز المعادلة (١) يساوي صفراً

أي أن

٤ أ^{٤} م^{٢} حـ^{٢} − ٤ (ب^{٢} + أ^{٢} م^{٢}) × أ^{٢} (حـ^{٢} − ب^{٢}) = ٠

بالقسمة على ٤ أ^{٢} تصبح المعادلة

أ^{٢} م^{٢} حـ^{٢} − (ب^{٢} + أ^{٢} م^{٢}) (حـ^{٢} − ب^{٢}) = ٠

أ^{٢} م^{٢} حـ^{٢} − ب^{٢} حـ^{٢} + ب^{٤} − أ^{٢} م^{٢} حـ^{٢} + أ^{٢} م^{٢} ب^{٢} = ٠

بالقسم على ب^{٢}

ب^{٢} + أ^{٢} م^{٢} − حـ^{٢} = ٠

أ^{٢} م^{٢} + ب^{٢} = حـ^{٢}

حـ = ± $\sqrt{\text{أ}^{٢}\,\text{م}^{٢} + \text{ب}^{٢}}$

ومنها فإن المستقيمان $\text{ص} = \text{م}\,\text{س} + \sqrt{\text{أ}^{2}\,\text{م}^{2} + \text{ب}^{2}}$

، $\text{ص} = \text{م}\,\text{س} - \sqrt{\text{أ}^{2}\,\text{م}^{2} + \text{ب}^{2}}$

يمسان القطع الناقص $\frac{\text{س}^{2}}{\text{أ}^{2}} + \frac{\text{ص}^{2}}{\text{ب}^{2}} = 1$

لجميع قيم م الحقيقية

نتيجة :

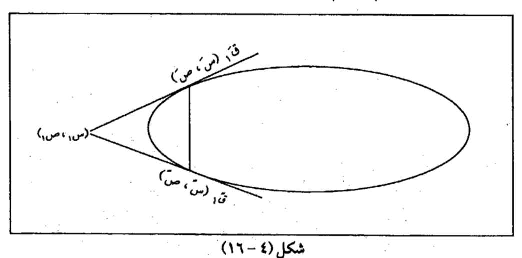
المستقيمان $(\text{ص} - \text{ك}) = \text{م}\,(\text{س} - \text{ل}) + \sqrt{\text{أ}^{2}\,\text{م}^{2} + \text{ب}^{2}}$

، $(\text{ص} - \text{ك}) = \text{م}\,(\text{س} - \text{ل}) - \sqrt{\text{أ}^{2}\,\text{م}^{2} + \text{ب}^{2}}$

يمسان القطع الناقص $\frac{(\text{س} - \text{ل})^{2}}{\text{أ}^{2}} + \frac{(\text{ص} - \text{ك})^{2}}{\text{ب}^{2}} = 1$

لجميع قيم م الحقيقية

(٤ - ٩) معادلة وتر التماس بالنسبة للقطع الناقص $\frac{\text{س}^{2}}{\text{أ}^{2}} + \frac{\text{ص}^{2}}{\text{ب}^{2}} = 1$ للنقطة $(\text{س}_{1}، \text{ص}_{1})$



شكل (٤ - ١٦)

بفرض النقطة ق $(س_{١} ، ص_{١})$ رسم منها المماسين ق ق′ ، ق ق″ للقطع الناقص

حيث $ق' \equiv (س' ، ص')$ ، $ق'' \equiv (س'' ، ص'')$

والمطلوب تعيين معادلة وتر التماس للنقطة ق

معادلة المماس عند ق′ هي $\frac{س\,س'}{أ^{٢}} + \frac{ص\,ص'}{ب^{٢}} = ١$ (١)

معادلة المماس عند ق″ هي $\frac{س\,س''}{أ^{٢}} + \frac{ص\,ص''}{ب^{٢}} = ١$ (٢)

حيث كل من المماسين (١) ، (٢) يمر بالنقطة $ق_{١}$ $(س_{١} ، ص_{١})$

إذن $(س_{١} ، ص_{١})$ تحقق معادلتهما

$$\frac{س_{١}\,س'}{أ^{٢}} + \frac{ص_{١}\,ص'}{ب^{٢}} = ١ \quad ، \qquad (٣)$$

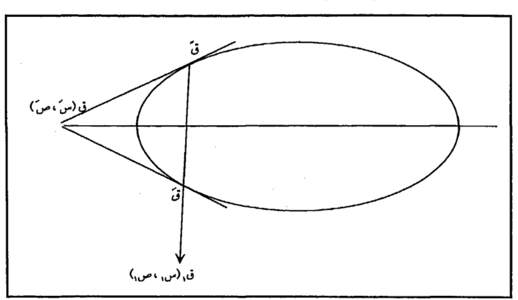
$$\frac{س_{١}\,س''}{أ^{٢}} + \frac{ص_{١}\,ص''}{ب^{٢}} = ١ \qquad (٤)$$

وتر التماس هو المستقيم

$$\frac{س\,س_{١}}{أ^{٢}} + \frac{ص\,ص_{١}}{ب^{٢}} = ١ \qquad (٥)$$

والمعادلة (٥) تتحقق بإحداثيات $ق_{١}$ ، $ق_{٢}$

(٤ - ١٠) معادلة الخط القطبي بالنسبة للقطع الناقص $\frac{س^2}{أ^2} + \frac{ص^2}{ب^2} = ١$ للنقطة $(س_1 ، ص_1)$



شكل (٤ - ١٧)

كما سبق وأوضحنا في القطع المكافئ فإنه يمكن تعريف الخط القطبي للنقطة $ق_1$ $(س_1 ، ص_1)$ بالنسبة للقطع الناقص $\frac{س^2}{أ^2} + \frac{ص^2}{ب^2} = ١$ هو مجموعة جميع النقاط التي يمر وتر تماسها بنقطة ثابتة $ق_1$

لإيجاد معادلة الخط القطبي للنقطة $ق_1$ $(س_1 ، ص_1)$ بالنسبة للقطع الناقص

$$\frac{س^2}{أ^2} + \frac{ص^2}{ب^2} = ١$$

نرسم أي قاطع من $ق_1$ $(س_1 ، ص_1)$ للقطع ثم نرسم المماسين للقطع عند نقطتي التقاطع قَ ، قً ولنفرض أن المماسين تلاقيا في النقطة ق (سَ ، صَ) فيكون الخط القطبي للنقطة $ق_1$ $(س_1 ، ص_1)$ والمراد إيجاد معادلته هو المحل الهندسي للنقطة ق (سَ ، صَ)

المستقيم القاطع للقطع يعتبر وتر تماس للنقطة ق (سَ ، صَ)

إذن معادلته هي

$$\frac{\text{س سَ}}{\text{أ}^{٢}} + \frac{\text{ص صَ}}{\text{ب}^{٢}} = ١$$

وحيث إن هذا القاطع يمر بالنقطة $\text{ق}_{١}$ ($\text{س}_{١}$ ، $\text{ص}_{١}$) فهي تحقق معادلته

إذن
$$\frac{\text{س}_{١}\text{سَ}}{\text{أ}^{٢}} + \frac{\text{ص}_{١}\text{صَ}}{\text{ب}^{٢}} = ١$$

أي أن المحل الهندسي للنقطة ق (سَ ، صَ)

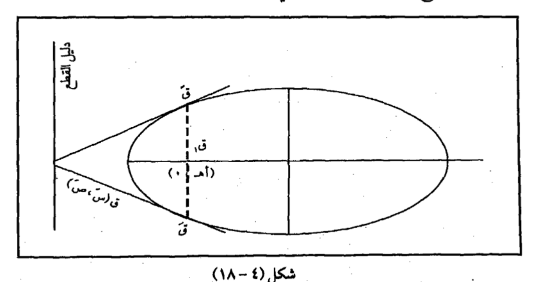
هو
$$\frac{\text{س}_{١}\text{س}}{\text{أ}^{٢}} + \frac{\text{ص}_{١}\text{ص}}{\text{ب}^{٢}} = ١$$

وهذه هي معادلة الخط القطبي للنقطة $\text{ق}_{١}$ ($\text{س}_{١}$ ، $\text{ص}_{١}$)

بالنسبة للقطع الناقص

نتيجة هامة :

دليل القطع الناقص هو الخط القطبي لبؤرته



شكل (٤ – ١٨)

إذا كان الاختلاف المركزي للقطع = هـ

فإن البؤرة $ق_١ \equiv$ (أ هـ ، ٠)

، ومعادلة الخط القطبي بالنسبة للقطع تصبح $\frac{س هـ}{أ} = ١$

أي $س = \frac{أ}{هـ}$ وهي معادلة الدليل

إذن دليل القطع الناقص هو الخط القطبي لبؤرته

مثال (٤ – ٩) :

أوجد معادلة المماس عند النقطة (–٣ ، ٢) للقطع الناقص

$٢ س^٢ + ٣ ص^٢ - ٣٠ = ٠$

الحـــل :

بإجراء التفاضل لمعادلة القطع الناقص

$$٤ س + ٦ ص \frac{د ص}{د س} = ٠$$

$$٦ ص \frac{د ص}{د س} = - ٤ س$$

$$\frac{د ص}{د س} = - \frac{٢}{٣} \frac{س}{ص}$$

$$\text{إذن } م = \left. \frac{د ص}{د س} \right|_{\substack{س = -٣ \\ ص = ٢}} = - \frac{٢}{٣} \times - \frac{٣}{٢} = ١$$

معادلة المماس هي $ص - ص_١ = م (س - س_١)$

$$ص - ٢ = ١ (س + ٣)$$

$$ص - س - ٥ = ٠$$

، معادلة العمودي $ص - ص_١ = م (س - س_١)$

$ص - ٢ = - ١ (س + ٣)$

$ص - ٢ = - س - ٣$

$ص + س + ١ = ٠$

إذن معادلة كل من المماس والعمودي للقطع على الترتيب هما

$ل = \{(س ، ص) : ص - س - ٥ = ٠\}$

، $لَ = \{(س ، ص) : ص + س + ١ = ٠\}$

مثال (٤ - ١٠) :

أوجد معادلتي المماسين من النقطة (١ ، ٢) للقطع الناقص

$٢ س^٢ + ص^٢ = ٦$

الحــل :

يمكن وضع معادلة القطع الناقص على الصورة

$$\frac{س^٢}{٣} + \frac{ص^٢}{٦} = ١$$

أي أن $أ^٢ = ٣$ ، $ب^٢ = ٦$

فتكون معادلة المماسين في الصورة

$ص = م س + \sqrt{أ^٢ م^٢ + ب^٢}$ ، $ص = م س - \sqrt{أ^٢ م^٢ + ب^٢}$

$ص = م س + \sqrt{٣ م^٢ + ٦}$ ، $ص = م س - \sqrt{٣ م^٢ + ٦}$

بما أن المماس يمر بالنقطة (٢ ، ١)

$١ = ٢ م \pm \sqrt{٣ م^٢ + ٦}$

$(١ - ٢ م) = \pm \sqrt{٣ م^٢ + ٦}$

بتربيع الطرفين :

$(١ - ٢م)^٢ = ٣ م^٢ + ٦$

$١ - ٤ م + ٤ م^٢ = ٣م^٢ + ٦$

$م^٢ - ٤م - ٥ = ٠$

$(م - ٥) (م + ١) = ٠$

إذن م = ٥ أو م = -١

فإذا كانت م = ٥

فإن معادلة المماس هي ص = ٥ س - ٩

وإذا كانت م = -١

فإن معادلة المماس هي ص = - س + ٣

أي أن المماسين من النقطة (٢ ، ١) للقطع الناقص $٢ س^٢ + ص^٢ = ٦$

هما $ل_١ = \{(س ، ص) : ص - ٥ س + ٩ = ٠\}$

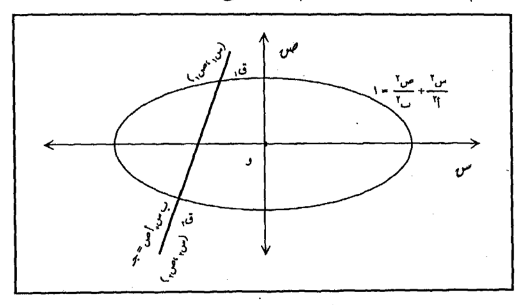
$ل_٢ = \{(س ، ص) : ص + س - ٣ = ٠\}$

مثال (٤ ـ ١١)

أوجد طول الوتر الذي يقطعه منحنى القطع $\frac{س^{٢}}{أ^{٢}} + \frac{ص^{٢}}{ب^{٢}} = ١$

من المستقيم ب س + أ ص = جـ

ثم أوجد متى يكون هذا المستقيم موازياً للقطع .



(شكل ٤-١٩)

نفرض أن المستقيم يقطع القطع الناقص في النقطتين

$ق_{١}(س_{١}،\ ص_{١})$ ، $ق_{٢}(س_{٢}،\ ص_{٢})$

والمطلوب إيجاد طول $|ق_{١}ق_{٢}|$

$$= \sqrt{(س_{١} - س_{٢})^{٢} + (ص_{١} - ص_{٢})^{٢}}$$

$$= \sqrt{س_{١}^{٢} + س_{٢}^{٢} - ٢\ س_{١}س_{٢} + ص_{١}^{٢} + ص_{٢}^{٢} - ٢\ ص_{١}ص_{٢}}$$

$$= \sqrt{(س_{١}^{٢} + ٢س_{١}س_{٢} + س_{٢}^{٢}) - ٤س_{١}س_{٢} + (ص_{١}^{٢} + ٢ص_{١}ص_{٢} + ص_{٢}^{٢}) - ٤ص_{١}ص_{٢}}$$

$$= \sqrt{(س_١ + س_٢)^٢ + (ص_١ + ص_٢)^٢ - ٤ \,(س_١ س + ص_١ ص_٢)} \qquad (١)$$

من معادلة المستقيم

$$ص = \frac{حـ - ب س}{أ}$$

بالتعويض في معادلة القطع :

$$\frac{س^٢}{أ^٢} + \frac{(حـ - ب س)^٢}{أ^٢ ب^٢} = ١$$

بالضرب × $أ^٢ ب^٢$

$$ب^٢ س^٢ + (حـ - ب س)^٢ = أ^٢ ب^٢$$

$$ب^٢ س^٢ + حـ^٢ - ٢ ب حـ س + ب^٢ س^٢ - أ^٢ ب^٢ = ٠$$

$$٢ ب^٢ س^٢ - ٢ ب حـ س + (حـ^٢ - أ^٢ ب^٢) = ٠$$

وهذه معادلة من الدرجة الثانية جذراها $س_١$ ، $س_٢$ يحققان

$$\left\{ \begin{array}{l} س_١ + س_٢ = \frac{-(-٢ ب حـ)}{٢ ب^٢} = \frac{حـ}{ب} \\ س_١ س_٢ = \frac{حـ^٢ - أ^٢ ب^٢}{٢ ب^٢} \end{array} \right. \qquad (٢)$$

من معادلة المستقيم أيضاً

$$س = \frac{حـ - أ ص}{ب}$$

وبالتعويض في معادلة القطع نحصل على :

$$\frac{(\text{حـ} - \text{أ ص})^{2}}{\text{أ}^{2}\,\text{ب}^{2}} + \frac{\text{ص}^{2}}{\text{ب}^{2}} = 1$$

$$\frac{\text{حـ}^{2} - 2\,\text{أ حـ ص} + \text{أ}^{2}\,\text{ص}^{2}}{\text{أ}^{2}\,\text{ب}^{2}} + \frac{\text{ص}^{2}}{\text{ب}^{2}} = 1$$

بالضرب $\times \text{أ}^{2}\,\text{ب}^{2}$

$$\text{حـ}^{2} - 2\,\text{أ حـ ص} + \text{أ}^{2}\,\text{ص}^{2} + \text{أ}^{2}\,\text{ص}^{2} = \text{أ}^{2}\,\text{ب}^{2}$$

$$2\,\text{أ}^{2}\,\text{ص}^{2} - 2\,\text{أ حـ ص} + (\text{حـ}^{2} - \text{أ}^{2}\,\text{ب}^{2}) = 0$$

وهذه معادلة من الدرجة الثانية في ص لها جذران هما ص_{1} ، ص_{2} يحققان

$$\left.\begin{aligned} \text{ص}_{1} + \text{ص}_{2} &= \frac{-(2\,\text{أ حـ})}{2\,\text{أ}^{2}} = \frac{\text{حـ}}{\text{أ}} \\ \text{ص}_{1}\,\text{ص}_{2} &= \frac{\text{حـ}^{2} - \text{أ}^{2}\,\text{ب}^{2}}{2\,\text{أ}^{2}} \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

بالتعويض من (٢) ، (٣) في (١) نحصل على

$$\text{ق}_{1}\,\text{ق}_{2} = \sqrt{\frac{\text{حـ}^{2}}{\text{ب}^{2}} - \frac{2(\text{حـ}^{2} - \text{أ}^{2}\,\text{ب}^{2})}{\text{ب}^{2}} + \frac{\text{حـ}^{2}}{\text{أ}^{2}} - \frac{2(\text{حـ}^{2} - \text{أ}^{2}\,\text{ب}^{2})}{\text{أ}^{2}}}$$

$$= \frac{1}{\text{أ ب}} \sqrt{\text{أ}^{2}\,\text{حـ}^{2} - 2\,\text{أ}^{2}\,\text{حـ}^{2} + 2\,\text{أ}^{4}\,\text{ب}^{2} + \text{ب}^{2}\,\text{حـ} - 2\,\text{ب}^{2}\,\text{حـ}^{2} + 2\,\text{أ}^{2}\,\text{ب}^{4}}$$

$$= \frac{1}{\text{أ ب}} \sqrt{-\text{أ}^{2}\,\text{حـ}^{2} - \text{ب}^{2}\,\text{حـ}^{2} + 2\,\text{أ}^{2}\,\text{ب}^{2}(\text{أ}^{2} + \text{ب}^{2})}$$

$$= \frac{1}{\text{أ ب}} \sqrt{-\text{حـ}^{2}(\text{أ}^{2} + \text{ب}^{2}) + 2\,\text{أ}^{2}\,\text{ب}^{2}(\text{أ}^{2} + \text{ب}^{2})}$$

$$= \frac{1}{\text{أ ب}} \sqrt{(\text{أ}^{2} + \text{ب}^{2})(2\,\text{أ}^{2}\,\text{ب}^{2} - \text{حـ}^{2})}$$

وإذا كان المستقيم يمس المنحنى فإن $\text{ق}_1 \text{ق}_1 = 0$

أي أن $\sqrt{(\text{أ}^2+\text{ب}^2)(2\text{أ}^2\text{ب}^2-\text{جـ}^2)} = 0$

$$(\text{أ}^2+\text{ب}^2)(2\text{أ}^2\text{ب}^2-\text{جـ}^2) = 0$$

$2\text{أ}^2\text{ب}^2 - \text{جـ}^2 = 0$ لأن $\text{أ}^2+\text{ب}^2$ لا يمكن أن $= 0$

$\text{أ}^2+\text{ب}^2 > 0$

$$\text{جـ}^2 = 2\text{أ}^2\text{ب}^2$$

أي أن شرط التماس هو

$$\text{جـ} = \sqrt{2}\ \text{أ}\ \text{ب}$$

تمارين (٤ - ٢)

(١) أوجد معادلة المماس والعمود عليه للقطع الناقص
٣ س^{٢} + ٤ ص^{٢} − ٦ س + ٨ ص + ٤٥ = ٠ عند النقطة (−٣ ، −٢)

(٢) أوجد معادلة المماس للقطع الناقص س^{٢} + ٤ ص^{٢} = ١٠٠
والذي يوازي المستقيم ٣ س + ٨ ص = ٧

(٣) أوجد ميل المماس للقطع الناقص ٤ س^{٢} − ١٢ س ص + ٩ ص^{٢} − ٢ س
+ ٣ ص − ٦ = ٠ عند أي نقطة على المنحنى

(٤) أوجد نقطة تماس المستقيم الذي يوازي محور السينات ويمس القطع الناقص
س^{٢} + س ص + ص^{٢} − ٣ = ٠ .

(٥) أوجد معادلة المماس للقطع الناقص ٥ س^{٢} + ٧ ص^{٢} = ٣٥
والذي يكون عموديا على المستقيم ٣ س + ٤ ص − ١٢ = ٠

(٦) أوجد طول الوتر الذي يقطعه منحنى القطع الناقص
٥ س^{٢} + ٩ ص^{٢} − ٢٠ س − ١٨ ص − ٢٥ = ٠ من محور السينات .

(٤ ـ ١١) طول تحت المماس وتحت العمود للقطع الناقص عند النقطة ($س_١$ ، $ص_١$)

أوضحنا فيما سبق وخلال دراستنا للقطع المكافيء أن :

طول تحت المماس لأي منحنى بالنسبة للنقطة ($س_١$ ، $ص_١$)

$$= - ص_١ \Big/ \left.\frac{د\,ص}{د\,س}\right|_{(س_١ ، ص_١)}$$

وطول تحت العمود للمنحنى بالنسبة للنقطة ($س_١$ ، $ص_١$) .

$$= ص_١ \cdot \left.\frac{د\,ص}{د\,س}\right|_{(س_١ ، ص_١)}$$

وهذا ما ينطبق أيضاً على القطع الناقص كمنحنى كما سبق وطبقنا ذلك بالنسبة للقطع المكافيء .

مثال (٤ ـ ١٢) :

أوجد طول تحت المماس وتحت العمود عند النقطة (-٣ ، -٢) للقطع الناقص $٣ س^٢ + ٤ ص^٢ - ٦ س + ٨ ص - ٤٥ = ٠$

الحـــل :

بإجراء التفاضل لمعادلة القطع نحصل على

$$٦ س + ٨ ص \frac{د\,ص}{د\,س} - ٦ + ٨ \frac{د\,ص}{د\,س} = ٠$$

$$٨ (ص + ١) \frac{د\,ص}{د\,س} + ٦ (س - ١) = ٠$$

$$\frac{د\,ص}{د\,س} = \frac{-٦ (س - ١)}{٨ (ص + ١)} = \frac{-٣ (س - ١)}{٤ (ص + ١)}$$

$$\left|\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}\right|_{(-٣ ، -٢)} = \frac{-٣(-٣-١)}{٤(-٢+١)} = \frac{-٣ \times -٤}{٤ \times -١} = -٣$$

طول تحت المماس = $-\text{ص}_١ \Big/ \left|\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}\right|_{(\text{س}_١ ، \text{ص}_١)}$

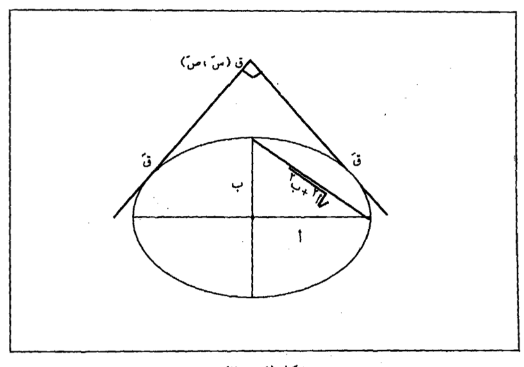
$= -\ (-٢ \,/\, -٣) = \frac{-٢}{٣}$ وحدات

طول تحت العمودي = $\text{ص}_١ \left|\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}\right|_{(\text{س}_١ ، \text{ص}_١)}$

$= -٢ \times -٣ = ٦$ وحدات

(٤ ـ ١٢) الخواص الهندسية للقطع الناقص :

أولاً : دائرة الاستدلال :



شكل (٤ - ٢٠)

إذا أخذت نقطة مثل ق (سَ ، صَ) خارج القطع ورسم منها مماسان للقطع بحيث كانت الزاوية المحصورة بين المماسين عند النقطة ق قائمة فإن النقطة ق في حركتها حول القطع ترسم دائرة تسمى دائرة الإستدلال التي يمكن أن نضع التعريف التالي لها :

تعريف :

هي مجموعة جميع النقاط التي يكون المماسين المرسومين منها للقطع الناقص متعامدين عندها .

لتعيين معادلة دائرة الاستدلال للقطع $\frac{\text{س}^{٢}}{\text{أ}^{٢}} + \frac{\text{ص}^{٢}}{\text{ب}^{٢}} = ١$

لنفرض أن النقطة ق (سَ ، صَ) بحيث ق قَ ، ق قً متعامدان عند النقطة ق

فيكون المطلوب هو تعيين المحل الهندسي للنقطة ق

بما أن المستقيم $\text{ل} = \{(\text{س} ، \text{ص}) : \text{ص} = \text{م س} \pm \sqrt{\text{أ}^{٢}\text{م}^{٢} + \text{ب}^{٢}}\}$

يمس القطع دائماً لجميع قيم م الحقيقية

والمستقيم يمر بالنقطة (سَ ، صَ) فهي تحقق معادلته

$$\text{صَ} = \text{م سَ} \pm \sqrt{\text{أ}^{٢}\text{م}^{٢} + \text{ب}^{٢}}$$

$$\text{أ}^{٢}\text{م}^{٢} + \text{ب}^{٢} = (\text{صَ} - \text{م سَ})^{٢}$$

$$\text{أ}^{٢}\text{م}^{٢} + \text{ب} = \text{صَ}^{٢} - ٢\,\text{م سَ صَ} + \text{م}^{٢}\text{سَ}^{٢}$$

$$(\text{أ}^{٢} - \text{سَ}^{٢})\,\text{م}^{٢} + ٢\,\text{سَ صَ م} + (\text{ب}^{٢} - \text{صَ}^{٢}) = ٠ \qquad (١)$$

وهذه معادلة من الدرجة الثانية في م ولها جذران هما $\text{م}_{١}$ ، $\text{م}_{٢}$

بما أن المماسين متعامدين إذن $م_1 \times م_2 = -1$ (٢)

ولكن من (١) $م_1 م_2 = \frac{ب^2 - ص_0^2}{أ^2 - س_0^2}$ (٣)

من (٢) ، (٣) نجد أن $\frac{ب^2 - ص_0^2}{أ^2 - س_0^2} = -1$

$$ب^2 - ص_0^2 = - أ^2 + س_0^2$$

$$س_0^2 + ص_0^2 = أ^2 + ب^2$$

وتكون دائرة الاستدلال هي $د = \{(س ، ص) : س^2 + ص^2 = (أ^2 + ب^2)\}$

وهذه دائرة مركزها نقطة الأصل (مركز القطع)

ونصف قطرها $= \sqrt{أ^2 + ب^2}$

$= \sqrt{\text{مربع نصف المحور الأكبر + مربع نصف المحور الأصغر}}$

مثال (٤ ـ ١٣) :

أوجد معادلة دائرة الاستدلال للقطع الناقص

$$٤س^2 + ٢ص^2 = ١$$

الحـــل :

نضع معادلة القطع على الصورة القياسية :

$$\frac{س^2}{\frac{١}{٤}} + \frac{ص^2}{\frac{١}{٢}} = ١$$

فيكون $أ^2 = \frac{١}{٤}$

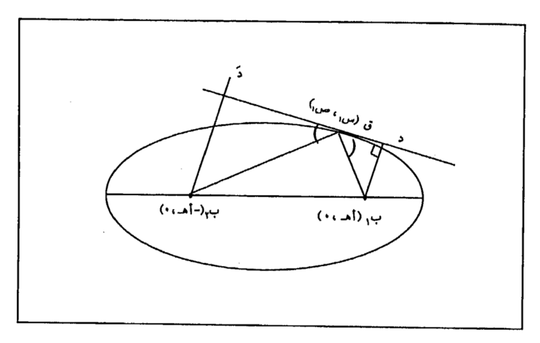
، $ب^2 = \frac{١}{٢}$

إذن معادلة دائرة الاستدلال هي

$$س^2 + ص^2 = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right)$$

إذن دائرة الإستدلال هي د = $\{(س ، ص) : س^2 + ص^2 = \frac{3}{4}\}$

ثانياً : المماس عند أي نقطة على القطع الناقص متساوي الميل على البعدين البؤرين للنقطة



شكل (٤ - ٢١)

$\overleftrightarrow{د دَ}$ يمس القطع $\frac{س^2}{أ^2} + \frac{ص^2}{ب^2} = 1$ عند النقطة ق $(س_1 ، ص_1)$

إذن معادلة المماس عند ق هي $\frac{س س_1}{أ^2} + \frac{ص ص_1}{ب^2} = 1$

ولكن البؤرة $ب_1$ هي نقطة (أ هـ ، ٠) حيث هـ الاختلاف المركزي

إذن

$$|ب_١ د_١| = \frac{\left|\frac{س_١ . أ هـ}{أ} - ١\right|}{\sqrt{\frac{س_١^٢}{أ^٤} + \frac{ص_١^٢}{ب^٤}}} \qquad (١)$$

البؤر الثانية $ب_٢ \equiv (-أ هـ ، ٠)$

$$|ب_٢ د_٢| = \frac{\left|\frac{- هـ س_١}{أ} - ١\right|}{\sqrt{\frac{س_١^٢}{أ^٤} + \frac{ص_١^٢}{ب^٤}}} \qquad (٢)$$

من (١) ، (٢)

$$\frac{ب_١ د_١}{ب_٢ د_٢} = \frac{\frac{هـ س_١}{أ} - ١}{\frac{-هـ س_١}{أ} - ١} = \frac{هـ س_١ - أ}{-هـ س_١ - أ}$$

$$= \frac{أ - هـ س_١}{أ + هـ س_١} = \frac{ق ب_١}{ق ب_٢}$$

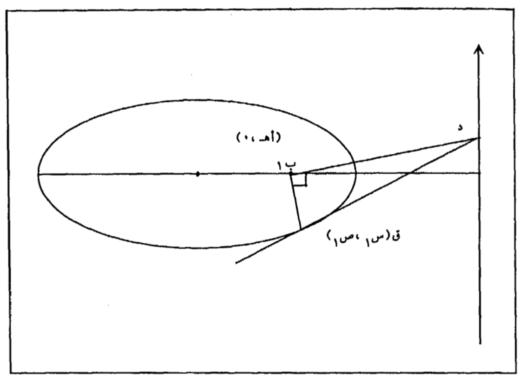
$$\frac{ب_١ د_١}{ق ب_١} = \frac{ب_٢ د_٢}{ق ب_٢}$$

إذن $ب_١ \hat{ق} د_١ = ب_٢ \hat{ق} د_٢$

يمكن الاستفادة من هذه الخاصية فيزيائيا :

فإذا كان هناك سطح مصقول ناشيء من دوران قطع ناقص حول محوره الأكبر ووضع مصدراً ضوئياً عند إحدى بؤرتي القطع فإن جميع الأشعة المنعكسة من السطح المصقول تمر بالبؤرة الثانية .

ثالثاً : جزء المماس لقطع ناقص المحصور بينه وبين نقطة التماس والنقطة التي يلاقي فيها المماس الدليل يقابل زاوية قائمة عند البؤرة



شكل (٤ - ٢٢)

إذا كانت معادلة القطع هي $\frac{س^2}{أ^2} + \frac{ص^2}{ب^2} = ١$ ، والنقطة ق $\equiv$ (س ١ ، ص ١)

فإن معادلة المماس للقطع عند ق هي :

$$\frac{س س_1}{أ^2} + \frac{ص ص_1}{ب^2} = ١ \qquad (١)$$

ومعادلة الدليل هي $س = \frac{أ}{هـ}$ (٢)

فإذا كانت د هي نقطة تقاطع المماس مع الدليل فإننا نستطيع الحصول على إحداثيات النقطة د وذلك بحل معادلتي المماس والدليل معاً حيث يكون الإحداثي السيني للنقطة د هو $س = \frac{أ}{هـ}$

وبالتعويض في معادلة المماس

$$\frac{\frac{\text{أ}}{\text{هـ}}\,\text{س}_1}{\text{أ}^2} + \frac{\text{ص}\,\text{ص}_1}{\text{ب}^2} = ١$$

$$\frac{\text{ص}\,\text{ص}_1}{\text{ب}^2} = ١ - \frac{\text{س}_1}{\text{أ}\,\text{هـ}}$$

$$\text{ص}\,\text{ص}_1 = \text{ب}^2 \left[١ - \frac{\text{س}_1}{\text{أ}\,\text{هـ}} \right]$$

$$\text{ص} = \frac{\text{ب}^2}{\text{ص}_1} \left[١ - \frac{\text{س}_1}{\text{أ}\,\text{هـ}} \right]$$

إذن إحداثيات النقطة د هي $\left(\frac{\text{أ}}{\text{هـ}} \text{ ، } \frac{\text{ب}^2}{\text{ص}_1} \left[١ - \frac{\text{س}_1}{\text{أ}\,\text{هـ}} \right] \right)$

إذن ميل ق ب_1 $(\text{م}_1) = \frac{\text{ص}_1}{\text{س}_1 - \text{أ}\,\text{هـ}}$

، ميل د ب_1 $(\text{م}_2) = \dfrac{\frac{\text{ب}^2}{\text{ص}_1} \left[١ - \frac{\text{س}_1}{\text{أ}\,\text{هـ}} \right]}{\frac{\text{أ}}{\text{هـ}} - \text{أ}\,\text{هـ}}$

$$= \dfrac{\frac{\text{ب}^2}{\text{ص}_1\,\text{أ}\,\text{هـ}} (\text{أ}\,\text{هـ} - \text{س}_1)}{\frac{\text{أ}}{\text{هـ}} (١ - \text{هـ}^2)}$$

$$م_١ \times م_٢ = \frac{ص_١}{س_١ - أ هـ} \times \frac{-(س_١ - أ هـ) \times ب^٢ \times هـ}{ص_١ \times أ \times هـ \times أ (١ - هـ^٢)}$$

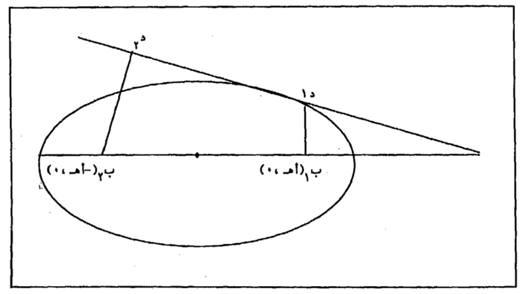
$$= \frac{-ب^٢}{أ^٢ (١ - هـ^٢)} \times \frac{-أ^٢ (١ - هـ^٢)}{-أ^٢ (١ - هـ^٢)} = -١$$

[ملاحظة $ب^٢ = أ^٢ (١ - هـ^٢)$ انظر تعريف الإختلاف المركزي]

إذن $ق ب_١$ ، $د ب_١$ متعامدان

أي أن $ق \hat{ب}_١ د$ قائمة وهو المطلوب

رابعاً : حاصل ضرب طولي العمودي الساقطين من البؤرتين على أي مماس لقطع ناقص يساوي مربع نصف المحور الأصغر



شكل (٤ - ٢٣)

إذا كانت معادلة القطع هي $\frac{\text{س}^2}{\text{أ}^2} + \frac{\text{ص}^2}{\text{ب}^2} = 1$

فإن البؤرتين هما $\text{ب}_1 \equiv (\text{أهـ} ، 0)$ ، $\text{ب}_2 \equiv (-\text{أهـ} ، 0)$

وتكون معادلة المماس هي $\text{ص} = \text{م س} + \sqrt{\text{أ}^2 \text{م}^2 + \text{ب}^2}$

طـــول العمـــود $\text{ب}_1 \text{د} = \frac{\text{م أ هـ} + \sqrt{\text{أ}^2 \text{م}^2 + \text{ب}^2}}{\sqrt{\text{م}^2 + 1}}$

طـــول العمـــود $\text{ب}_2 \text{د} = \frac{-\text{م أ هـ} + \sqrt{\text{أ}^2 \text{م}^2 + \text{ب}^2}}{\sqrt{\text{م}^2 + 1}}$

حـاصل ضـرب العمـوديـن $= \frac{\text{م أ هـ} + \sqrt{\text{أ}^2 \text{م}^2 + \text{ب}^2}}{\sqrt{\text{م}^2 + 1}}$

$$\times \frac{-\text{م أ هـ} + \sqrt{\text{أ}^2 \text{م}^2 + \text{ب}^2}}{\sqrt{\text{م}^2 + 1}}$$

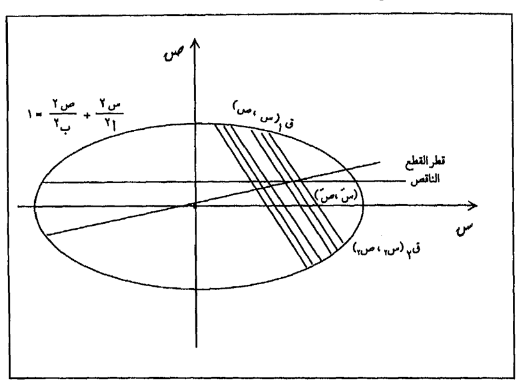
$$= \frac{\text{أ}^2 \text{م}^2 + \text{ب}^2 - \text{م}^2 \text{أ}^2 \text{هـ}^2}{\text{م}^2 + 1}$$

$$= \frac{\text{أ}^2 \text{م}^2 (1 - \text{هـ}^2) + \text{ب}^2}{\text{م}^2 + 1}$$

$$= \frac{\text{م}^2 \text{ب}^2 + \text{ب}^2}{\text{م}^2 + 1}$$

$$= \frac{\text{ب}^2 (\text{م}^2 + 1)}{(\text{م}^2 + 1)} = \text{ب}^2$$

(٤ ـ ١٣) قطر القطع الناقص



شكل (٤ - ٢٤)

تعريف :

قطر القطع الناقص هو مجموعة جميع نقاط منتصفات مجموعة متوازية من أوتار القطع الناقص .

أي أنه هو المحل الهندسي لنقط منتصفات مجموعة متوازية من الأوتار في قطع ناقص ما .

معادلة القطر :

إذا كانت معادلة القطع الناقص $\frac{س^2}{أ^2} + \frac{ص^2}{ب^2} = 1$ (١)

ونفرض أن أحد هذه الأوتار $ق_1 ق_2$ معادلته هي $ص = م س + حـ$ (٢)

وان ق منتصف هذا الوتر

فيكون المطلوب هو إيجاد المحل الهندسي للنقطة ق

من معادلة المستقيم وبالتعويض في معادلة القطع الناقص نحصل على :

$$\frac{س^2}{أ^2} + \frac{(م س + حـ)^2}{ب^2} = 1$$

$$س^2 \left[\frac{1}{أ^2} + \frac{م^2}{ب^2} \right] + \frac{2 م حـ}{ب^2} س + \frac{حـ^2}{ب^2} - 1 = 0 \qquad (٣)$$

والمعادلة الأخيرة من الدرجة الثانية لها جذران هما $س_1$ ، $س_2$ أي الإحداثيين السينين للنقطة $ق_1$ ، $ق_2$ على الترتيب .

من المعادلة (٣) نجد أن

$$س_1 + س_2 = \frac{-2 م حـ}{ب^2} \div \left[\frac{1}{م^2} + \frac{م^2}{ب^2} \right] = \frac{-2 م حـ أ^2}{ب^2 + أ^2 م^2}$$

فإذا كانت ق هي منتصف $ق_1 ق_2$ فإن إحداثيها السيني هو

$$\frac{س_1 + س_2}{2} = \frac{-م أ^2 حـ}{ب^2 + أ^2 م^2}$$ أي أنه إذا كانت ق هي

$$سَ = \frac{-م أ^2 حـ}{ب^2 + أ^2 م^2} \qquad (٤)$$

ولكن من (٢) $صَ = م سَ حـ$ (٥)

بحذف حـ من (٤) ، (٥) نجد أن :

$$سَ = - \frac{-م أ^2 (صَ - م سَ)}{ب^2 + أ^2 م^2}$$

$$ص َ \left[\frac{م أ^٢}{ب^٢ + أ^٢ م^٢} \right] = س َ \left[\frac{م^٢ أ^٢}{ب^٢ + أ^٢ م^٢} - ١ \right]$$

إذن $م أ^٢ ص َ = - ب^٢ س َ$

ويكون المحل الهندسي للنقطة (سَ ، صَ) معادلته هي :

$$ص = \frac{- ب^٢}{م أ^٢} س$$

وواضح أن المعادلة السابقة هي معادلة مستقيم يمر بنقطة الأصل ونستنتج من ذلك أن جميع أقطار القطع الناقص تمر بنقطة الأصل (مركز القطع) .

تعريف :

يقال إن قطران مترافقان إذا نصف أحدهما مجموعة من الأوتار الموازية للآخر

مثال (٤ ـ ١٤) :

أوجد معادلة قطر القطع الناقص $\frac{س^٢}{٩} + \frac{ص^٢}{٤} = ١$ الذي ينصف جميع الأوتار التي ميلها $\frac{١}{٣}$

الحـل :

باستخدام معادلة القطر $ص = \frac{- ب^٢}{م أ^٢} س$

تكون المعادلة المطلوبة هي :

$$ص = \frac{- ٤}{\frac{١}{٣} \times ٩} س$$

$$ص = \frac{-٤}{٣} س$$

أي أن القطر ل = {(س ، ص) : ٤ س + ٣ ص = ٠}

تمارين (٤-٣)

(١) أوجد معادلة الأوتار البؤرية المارة بالنقطة (٢ ، ١) والواقعة على القطع الناقص

٣ س + ٢ ص^{٢} – ٦ س – ٤ س + ٢ = ٠

(٢) أوجد معادلتي المماسين للقطع الناقص ٩ س^{٢} + ١٦ ص^{٢} = ١

الذي يصنع كل منهما زاوية تساوي ٤٥° مع المحور الأكبر

(٣) أوجد قيمة ك التي تجعل المستقيم ٢ ص + ٣ س + ك = ٠

مماساً للقطع س^{٢} + ٤ ص^{٢} = ١

(٤) أوجد معادلتي المماسين للقطع س^{٢} + ٢ ص^{٢} = ٦ المرسومين من النقطة (٢ ، ١) وأوجد إحداثيات نقط التماس .

(٥) نقطة تتحرك بحيث يكون حاصل ضرب ميلي مستقيمين واصلين منهما الى النقطتين (٢ ، ٣) ، (١ ، ٢) يساوي -٣ أثبت أن المحل الهندسي قطع ناقص وأوجد مركزه .

(٦) أثبت أن المحل الهندسي للنقط التي تقسم الأبعاد البؤرية لنقط القطع الناقص ٩ س^{٢} + ٢٥ ص^{٢} = ٢٢٥ بنسبة ١ : ٣ من جهة البؤرة هو قطع ناقص متحد مع القطع الأصلي في تلك البؤرة .

(٧) أوجد طول أحد المماسات المشتركة للقطعين :

٤ س^{٢} + ص^{٢} = ٢٦ ، س^{٢} + ٢ ص^{٢} = ١٦

(٨) ق نقطة واقعة على القطع الناقص $\frac{س^٢}{أ^٢} + \frac{ص^٢}{ب^٢} = ١$

فإذا قابل المماس للقطع عند ق المماسين عند الرأسين $ف_١$ ، $ف_٢$ في النقطتين $ك_١$ ، $ك_٢$ فإثبت أن

$$ف_١ ك_١ \times ف_٢ ك_٢ = ب^٢$$

(٩) إثبت أن المحل الهندسي لمنتصفات الأجزاء من المماسات للقطع الن

$\frac{س^٢}{أ^٢} + \frac{ص^٢}{ب^٢} = ١$ المحصورة بين المحورين هو المنحنى $\frac{أ^٢ ب^٢}{س^٢ ص^٢} = ٤$

(١٠) إذا كونت بؤرتي القطع الناقص وإحدى نهايتي محوره الأصغر رؤوس مثلث متساوي الأضلاع فأوجد الاختلاف المركزي للقطع .

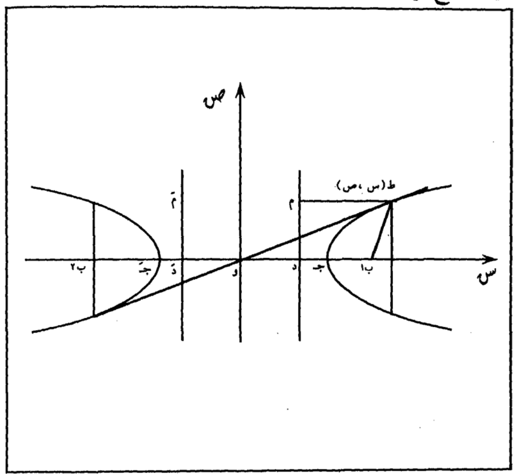
(١١) أوجد معادلة قطر القطع الناقص ٩ $س^٢$ + ٢٥ $ص^٢$ = ٢٢٥ ، والذي ينصف الأوتار التي لها ميل مشترك = ٣

(١٢) أوجد معادلة القطر في القطع الناقص $س^٢$ + ٤ $ص^٢$ = ٤ والمرافق للقطر ص = ٣ س

(١٣) أوجد معادلة قطر القطع الناقص ٤ $س^٢$ + ٥ $س^٢$ = ٢٠ التي تنصف الأوتار التي : (أ) ميلها = $- \frac{٢}{٣}$

(ب) توازي المستقيم ٣ س − ٥ ص = ٦ .

ثانياً : القطع الزائد



شكل (٤ – ٢٥)

تعريف :

يعرف القطع الزائد بأنه المحل الهندسي لنقطة تتحرك في مستوى معلوم بحيث تكون النسبة بين بعدها عن نقطة ثابتة ب١ وبعدها عن مستقيم م د تكون دائماً نسبة ثابتة هـ بحيث هـ > ١

وتسمى النقطة الثابتة ب١ بالبؤرة والمستقيم الثابت م د بالدليل والنسبة هـ تعرف بالاختلاف المركزي للقطع الزائد .

(٤ ـ ١٤) معادلة القطع الزائد :

إذا اعتبرنا مركز القطع هو نقطة الأصل و ، $ب_١$ ، $ب_٢$ هما البؤرتان ، م د ، مَ دَ هما دليلا القطع (أنظر شكل ٤ ـ ٢٥)

وكان حـ حَ = ٢ أ ، هـ > ١

بما أن $\frac{ب_١ حـ}{حـ د} = هـ$

$$ب_١ حَ = هـ . حـ د \quad (١)$$

$$ب_١ حَ = هـ . حَ د \quad (٢)$$

من تعريف القطع

من (١) ، (٢) بالطرح

$$ب_١ حَ - ب_١ حـ = هـ (حَ د - حـ د)$$

$$حـ حَ = هـ \times ٢ و د$$

ومنها

$$٢ أ = ٢هـ \times و د$$

$$و د = \frac{أ}{هـ}$$

لكن من (١) ، (٢) بالجمع فإن

$$و ب_١ = أ هـ$$

نفرض نقطة على القطع الزائد ط (س ، ص)

$$\overline{ب_١ ط}^{٢} = هـ^{٢} \overline{ط م}^{٢}$$

وبما أن إحداثيات $ب_١$ (البؤرة) هي (أ هـ ، ٠)

والدليل هو المستقيم $س = \frac{أ}{هـ}$

إذن $$(\text{س} - \text{أ}\,\text{هـ})^{٢} + \text{ص}^{٢} = \text{هـ}^{٢}\left(\text{س} - \frac{\text{أ}}{\text{هـ}}\right)^{٢}$$

$$\text{س}^{٢} - ٢\text{أ}\text{هـ}\text{س} + \text{أ}^{٢}\text{هـ}^{٢} + \text{ص}^{٢} = \text{هـ}^{٢}\text{س}^{٢} - ٢\text{أ}\text{هـ}\text{س} + \text{أ}^{٢}$$

$$\text{س}^{٢}(\text{هـ}^{٢} - ١) - \text{ص}^{٢} = \text{أ}^{٢}(\text{هـ}^{٢} - ١)$$

بالقسمة على $\text{أ}^{٢}(\text{هـ}^{٢} - ١)$

$$\frac{\text{س}^{٢}}{\text{أ}^{٢}} - \frac{\text{ص}^{٢}}{\text{أ}^{٢}(\text{هـ}^{٢} - ١)} = ١$$

بوضع $\text{ب}^{٢} = \text{أ}^{٢}(\text{هـ}^{٢} - ١)$ نجد أن

$$\frac{\text{س}^{٢}}{\text{أ}^{٢}} - \frac{\text{ص}^{٢}}{\text{ب}^{٢}} = ١$$

وهي معادلة القطع الزائد المطلوبة

لاحظ الفرق الواضح والهام بين معادلتي القطعين الناقص والزائد :

ففي القطع الناقص وضعنا $\text{ب}^{٢} = \text{أ}^{٢}(١ - \text{هـ}^{٢})$ حيث $\text{هـ} < ١$

بينما في القطع الزائد وضعنا $\text{ب}^{٢} = \text{أ}^{٢}(\text{هـ}^{٢} - ١)$ حيث $\text{هـ} > ١$

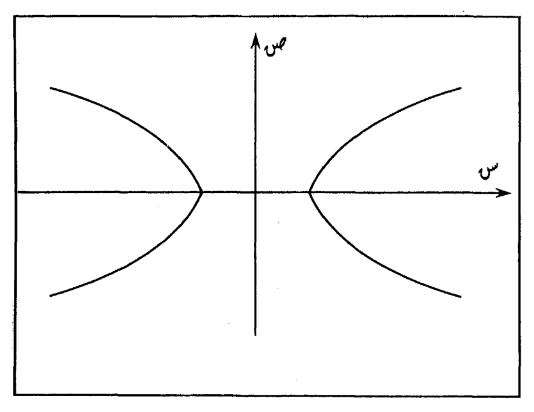
مع العلم بأن حـ حـَ يسمى بالمحور المستعرض للقطع حيث طول حـ حـَ = ٢أ والمحور العمودي عليه من نقطة المركز يسمى بالمحور المرافق

[في شكل (٤ ـ ٢٥) المحور المرافق يقع على محور الصادات]

(٤ ـ ١٥) الصور القياسية المختلفة لمعادلة القطع الزائد :

نتناول في هذا الجزء الصور القياسية المختلفة لمعادلة القطع الزائد تبعاً لوضع المحور القاطع والمحور المرافق بالنسب لمحاور الإحداثيات .

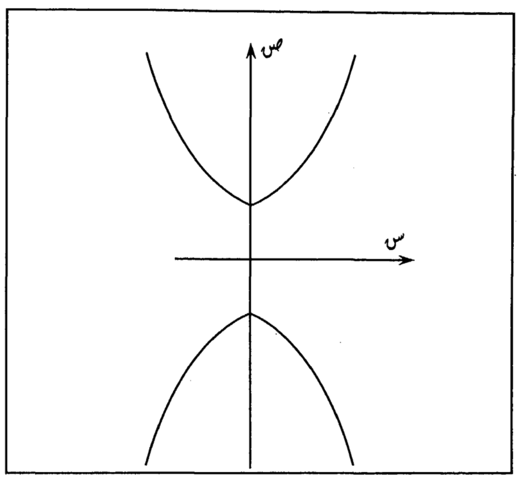
أولاً : إذا كان المحور القاطع يقع على محور السينات ، والمحور المرافق على محور الصادات .



شكل (٤ - ٢٦)

تكون معادلة القطع $\frac{س^2}{أ^2} - \frac{ص^2}{ب^2} = 1$

ثانياً : إذا كان المحور القاطع يقع على محور الصادات ، المحور المرافق يقع على محور السينات .

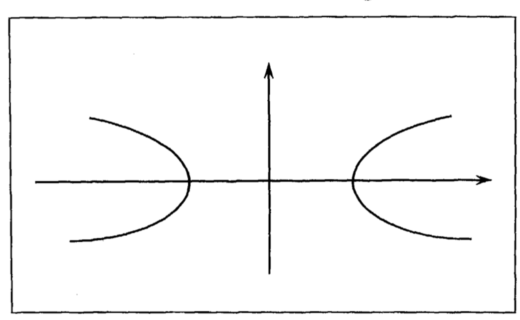


شكل (٤ - ٢٧)

تكون معادلة القطع $\frac{ص^2}{أ^2} - \frac{س^2}{ب^2} = 1$

وفي الحالتين يكون $ب^2 = أ^2 (هـ^2 - 1)$.

(٤ ـ ١٦) معادلة القطع الزائد الناتجة من انتقال المحاور .



شكل (٤ - ٢٨)

المعادلة $$\frac{(س - ل)^{٢}}{أ^{٢}} - \frac{(ص - ك)^{٢}}{ب^{٢}} = ١$$

هي معادلة قطع زائد لأنه لو نقلنا نقطة الأصل إلى النقطة الإختيارية (ل ، ك)

تصبح المعادلة $$\frac{س'^{٢}}{أ^{٢}} - \frac{ص'^{٢}}{ب^{٢}} = ١$$

وهي معادلة قطع زائد مركزة نقطة الأصل الجديدة الإختيارية ومن ذلك فإننا نستنتج أن

$$\frac{(س - ل)}{أ^{٢}} - \frac{(ص - ك)^{٢}}{ب^{٢}} = ١$$

هي معادلة قطع زائد له الخواص التالية :

(١) المركز (ل ، ك)

(٢) معادلة المحور القاطع ص = ك .

(٣) معادلة المحور المرافق س = ل .

(٤) طرفا المحور القاطع هما (ل − أ ، ك) ، (ل + أ ، ك)

(٥) طرفا المحور المرافق هما (ل ، ك − ب) ، (ل ، ك + ب) .

(٦) بؤرتاه هما (ل + هـ أ ، ك) ، (ل − هـ أ ، ك)

(٧) معادلتا الدليلين هما : $س = ل - \frac{أ}{هـ}$ ، $س = ل + \frac{أ}{هـ}$

(٤ ـ ١٧) تعيين طول الوتر البؤري العمودي للقطع الزائد :

من معادلة القطع $\frac{س^٢}{أ^٢} - \frac{ص^٢}{ب^٢} = ١$ (أنظر شكل ٤ ـ ٢٥)

بوضع س = أ هـ نحصل على

$$\frac{أ^٢ هـ^٢}{أ^٢} - \frac{ص^٢}{ب^٢} = ١$$

$$\frac{ص^٢}{ب^٢} = هـ^٢ - ١$$

$$ص^٢ = ب^٢ (هـ^٢ - ١)$$

$$= ب^٢ \times \frac{ب^٢}{أ^٢}$$

$$= \frac{ب^٤}{أ^٢}$$

$$ص = \frac{ب^٢}{أ}$$

إذن طول الوتر البؤري العمودي $= \frac{٢ ب^٢}{أ}$

(٤ ـ ١٨) معادلتا المماس والعمودي للقطع الزائد عند نقطة عليه .

معادلة المماس عند النقطع ($س_1$ ، $ص_1$) للقطع الزائد

$$\frac{س^2}{أ^2} - \frac{ص^2}{ب^2} = 1$$

تكون على الصورة

$$\frac{س\,س_1}{أ^2} - \frac{ص\,ص_1}{ب^2} = 1$$

البرهان :

تماماً كما ورد سابقاً من خلال عرضنا للقطع الناقص مع ملاحظة اختلاف الإشارة

(أنظر البرهان السابق في ٤ – ٧)

أيضاً معادلة العمودي على المماس عند النقطة ($س_1$ ، $ص_1$) للقطع الزائد

$$\frac{س^2}{أ^2} - \frac{ص^2}{ب^2} = 1$$

تكون على الصورة :

$$\frac{ص - ص_1}{س - س_1} = \frac{أ^2}{ب^2} \; \frac{ص_1}{س_1}$$

البرهان :

تماماً كما ورد سابقاً من خلال عرضنا للقطع الناقص مع ملاحظة اختلاف الإشارة

(أنظر البرهان السابق في ٤ – ٧)

(٤ ـ ١٩) شرط تماس المستقيم ص = م س + حـ

للقطع الزائد $\frac{س^٢}{أ^٢} - \frac{ص^٢}{ب^٢} = ١$

الشرط اللازم لكي يمس المستقيم ص = م س + حـ

القطع الزائد $\frac{س^٢}{أ^٢} - \frac{ص^٢}{ب^٢} = ١$

هو $حـ = \pm \sqrt{أ^٢ م^٢ - ب^٢}$

أي أن المستقيم $ص = م س \pm \sqrt{أ^٢ م^٢ - ب^٢}$

يمس القطع الزائد $\frac{س^٢}{أ^٢} - \frac{ص^٢}{ب^٢} = ١$ (لجميع قيم م الحقيقية)

البرهان :

تماماً كما ورد سابقاً من خلال عرضنا للقطع الناقص مع ملاحظة اختلاف الإشارة .

(انظر البرهان السابق في ٤ – ٨)

(٤ ـ ٢٠) معادلة وتر التماس بالنسبة للقطع الزائد $\frac{س^{٢}}{أ^{٢}} - \frac{ص^{٢}}{ب^{٢}} = ١$ للنقطة ($س_{١}$ ، $ص_{١}$) .

معادلة وتر التماس للقطع الزائد .

$$\frac{س^{٢}}{أ^{٢}} - \frac{ص^{٢}}{ب^{٢}} = ١$$

بالنسبة للنقطة ($س_{١}$ ، $ص_{١}$) هي $\frac{س س_{١}}{أ^{٢}} - \frac{ص ص_{١}}{ب^{٢}} = ١$

البرهان :

تماماً كما ورد سابقاً من خلال عرضنا للقطع الناقص مع ملاحظة إختلاف الإشارة .

(أنظر البرهان السابق في ٤ – ٩)

(٤ ـ ٢١) معادلة زوج المستقيمان المماسين المرسومين من النقطة($س_{١}$ ، $ص_{١}$) للقطع الزائد هي :

$$\left[\frac{س س_{١}}{أ^{٢}} - \frac{ص ص_{١}}{ب^{٢}} - ١\right]^{٢} =$$

$$\left[\frac{س^{٢}}{أ^{٢}} - \frac{ص^{٢}}{ب^{٢}} - ١\right] \cdot \left[\frac{س_{١}^{٢}}{أ^{٢}} - \frac{ص_{١}^{٢}}{ب^{٢}} - ١\right]$$

البرهان :

تماماً كما ورد سابقاً من خلال عرضنا للقطع الناقص مع ملاحظة اختلاف الإشارة

(انظر البرهان في ٤ ـ ١٠) .

(٤ ـ ٢٢) الخواص الهندسية للقطع الزائد

أولاً : دائرة الاستدلال للقطع الزائد .

معادلة دائرة الإستدلال في القطع الزائد الذي معادلته

$$\frac{س^2}{أ^2} - \frac{ص^2}{ب^2} = 1$$ هي

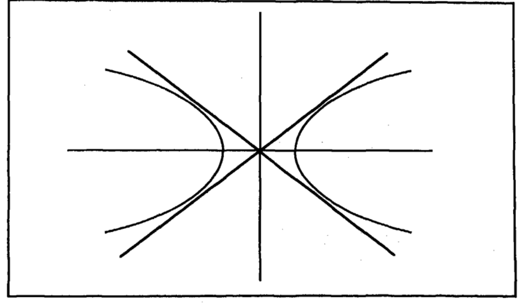
$$س^2 + ص^2 = أ^2 - ب^2$$

التعريف والبرهان :

تماماً كما ورد سابقاً من خلال عرضنا للقطع الناقص مع ملاحظة اختلاف الإشارة

(انظر البرهان السابق في ٤ ـ ١٢) .

ثانياً : الخطان التقاربيان للقطع الزائد :



شكل (٤ – ٢٩)

تعريف :

يعرف الخط التقاربي لأي منحنى هو المستقيم الذي يمس المنحنى في ما لا نهاية .

معادلة الخط التقاربي للقطع الزائد :

معادلة القطع الزائد هي $\frac{س^2}{أ^2} - \frac{ص^2}{ب^2} = 1$ (١)

نفرض مستقيماً معادلته ص = م س + حـ (٢)

وبحل (١) ، (٢) معاً

إذن $\frac{س^2}{أ^2} - \frac{(م س + حـ)^2}{ب^2} = 1$

ومنها فإن $\left[\frac{1}{أ^2} - \frac{م^2}{ب^2}\right] س^2 - \frac{2 م حـ}{ب^2} س - \left[\frac{حـ^2}{ب^2} + 1\right] = 0$ (٣)

إذن الخط التقاربي يقطع القطع في ∞ إذن جذرا المعادلة (٣) لانهائيان

ومن شرط أن يكون الجذران لانهائيان في المعادلة $أ' س^2 + ب' س + حـ' = 0$

فإن $أ' = 0$ ، $ب' = 0$

من المعادلة (٣) $أ' = \left[\frac{1}{أ^2} - \frac{م^2}{ب^2}\right] = 0$ (٤)

، $ب' = \frac{2 م حـ}{ب^2} = 0$ (٥)

من المعادلة (٥) إذن حـ = ٠ (م ≠ ٠ ، ب ≠ ٠)

من المعادلة (٤) إذن $م^2 = \frac{ب^2}{أ^2}$

أي $م = \pm \frac{ب}{أ}$ وبالتعويض في (٢)

تكون معادلة الخطين التقاربين للقطع الزائد هي :

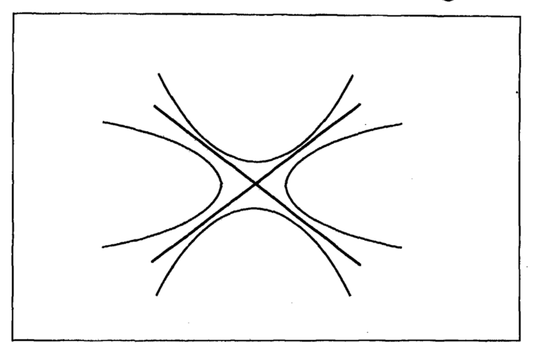
$$ص = \frac{ب}{أ} س \quad ، \quad ص = - \frac{ب}{أ} س$$

(حيث حـ = ٠)

إذن يوجد للقطع الزائد $\frac{س^2}{أ^2} - \frac{ص^2}{ب^2} = ١$ خطان تقاربيان

معادلتهما المشتركة $ص^2 = \frac{ب^2}{أ^2} س^2$ وهذه معادلة مستقيمين يمران بنقط الأصل (مركز القطع) .

ثالثاً : القطع الزائد المرافق



شكل (٤ - ٣٠)

من البند السابق فإن القطع $\frac{س^2}{أ^2} - \frac{ص^2}{ب^2} = ١$ (١)

له معادلة مشتركة للخطين التقاربيين هي

$$\frac{س^2}{أ^2} - \frac{ص^2}{ب^2} = ٠$$

ولكن هذه المعادلة تعتبر أيضاً معادلة مشتركة للخطين التقاربيين

للقطع الزائد $\frac{ص^2}{أ^2} - \frac{س^2}{ب^2} = 1$ (٢)

يعرف القطع الزائد الذي معادلته رقم (٢)

بأنه قطع زائد مرافق للقطع الزائد الذي معادلته رقم (١)

رابعاً : القطع الزائد القائم

القطع الزائد القائم هو القطع الزائد الذي يتساوى فيه طولا المحورين

أي أن $2أ = 2ب$ ومنها

$أ = ب$

وفي القطع الزائد القائم يكون :

(١) معادلة القطع :

من معادلة القطع الزائد $\frac{س^2}{أ^2} - \frac{ص^2}{ب^2} = 1$

بوضع $أ = ب$

تصبح معادلة القطع الزائد القائم هي

$$س^2 - ص^2 = أ^2$$

(٢) الاختلاف المركزي :

في القطع الزائد $\frac{س^2}{أ^2} - \frac{ص^2}{ب^2} = 1$

يكون $أ^2 (هـ^2 - 1) = ب^2$ هـ (الاختلاف المركزي)

بما أن القطع زائد قائم إذن $أ^2 (هـ^2 - ١) = أ^2$

ومنها $\sqrt{هـ} = ٢$

(٣) الخطين التقاربين :

معادلة الخطين التقاربيين في القطع الزائد هي

$$ص^2 = \frac{ب^2}{أ^2} أ^2$$

وإذا كان القطع الزائد قائماً فإن $أ^2 = ص^2$

وتكون معادلة الخطين التقاربيين هي $\frac{ص^2}{س^2} = ١$

أي أن $ص = \pm س$

وهذه بالطبع معادلة مستقيمين متعامدين . . . ومن ذلك فإن الخطين التقاربيين للقطع الزائد القائم مستقيمان متعامدان .

من (١) ، (٢) ، (٣) تتضح لنا الخواص المختلفة للقطع الزائد القائم .

ملاحظة :

معادلة القطع الزائد القائم بالنسبة لخطي التقارب كمحوري إحداثيات .

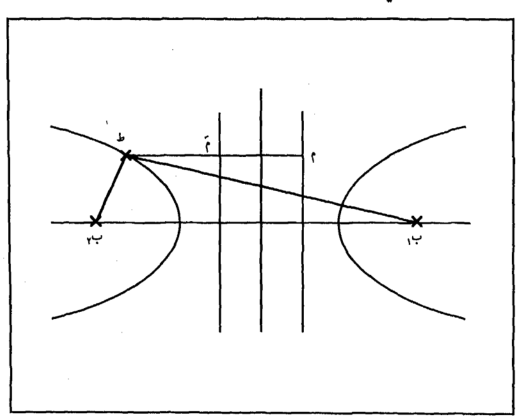
لإيجاد المعادلة نتصور دوران محوري الإحداثيات زاوية قدرها ٤٥°

أي نضع $س = سَ \text{ حتا } ٤٥° - صَ \text{ حا } ٤٥°$

، $ص = سَ \text{ حا } ٤٥° + صَ \text{ حتا } ٤٥°$ في معادلة القطع الزائد القائم فنحصل على المعادلة العامة للقطع الزائد القائم بالنسبة للخطين التقاربيين للقطع الزائد القائم كمحوري إحداثيات .

في الصورة $س ص = حـ^2$

خامساً : الفرق بين البعدين البؤريين لأي نقطة تقع على القطع الزائد تساوي مقداراً ثابتاً



(٤ ـ ٣١)

البرهان :

من تعريف القطع الزائد وشكل (٤ ـ ٣١)

ب$_1$ س = هـ . ط م

ب$_2$ ط = هـ . ط مَ

ب$_1$ ط − ب$_2$ ط = هـ(ط م − ط مَ)

= هـ × م مَ

ولكن بعد الدليل عن المحور الصادي $= \frac{أ}{هـ}$

إذن $م\,مَ = \frac{أ^2}{هـ}$

إذن $ب_1 ط - ب_2 ط = هـ \times \frac{أ^2}{هـ}$

$= ٢أ$

= مقدار ثابت

وهو المطلوب

يمكن استخدام هذه الخاصة في تعريف القطع الزائد

تعريف :

القطع الزائد هو المحل الهندسي لنقطة تتحرك بحيث يكون الفرق بين بعديها عن نقطتين ثابتتين يساوي مقدار ثابت .

مثال (٤ ـ ١٥) :

أوجد معادلة القطع الزائد الذي ينطبق محوريه على محوري الإحداثيات إذا علم أن طول وتره البؤري العمودي يساوي ٨ والمسافة بين البؤرتين تساوي $٢\sqrt{٥}$

الحــل :

طول الوتر البؤري $= \frac{٢ب^2}{أ} = ٨$

إذن $ب^2 = ٤أ$ (١)

$٢أهـ = ٢\sqrt{٥}$

$٢\sqrt{أ^2 + ب^2} = ٢\sqrt{٥}$

$أ^2 + ب^2 = ٥$ (٢)

بالتعويض من (١) في (٢)

$$أ^{٢} + ٤أ - ٥ = ٠$$

$$(أ + ٥)(أ - ١) = ٠$$

$$أ = -٥ \quad أو \quad أ = ١$$

$$، ب^{٢} = ٤$$

فإذا كان محور القطع ينطبق على محور السينات فإن معادلته :

هي $$\frac{س^{٢}}{١} - \frac{ص^{٢}}{٤} = ١$$

وإذا كان محور القطع ينطبق على محور الصادات فإن معادلته

هي $$\frac{ص^{٢}}{١} - \frac{س^{٢}}{٤} = ١$$

مثال (٤ - ١٦)

أوجد مركز ورأسي وبؤرتي القطع الزائد

$$\frac{(س-٢)^{٢}}{٢٥} - \frac{(ص+٣)^{٢}}{١٦} = ١$$

ثم أوجد معادلة الدليلين والخطين التقاربين

الحـــل :

بنقل المحاور إلى النقطة الاختياريه (٢ ، -٣) وذلك

لوضع القطع الزائد على الصوره $\frac{س^{٢}}{أ^{٢}} - \frac{ص^{٢}}{ب^{٢}} = ١$

فإن النقطة (٢ ، -٣) هي نقطة أصل جديدة وبالتالي فإنها تصبح مركز القطع

إذن مركز القطع ≡ (٢ ، −٣)

رأسا القطع (طرفا المحور القاطع) ≡ (ل − أ ، ك) ، (ل + أ ، ك)

≡ (−٣ ، −٣) ، (٧ ، −٣)

ولتعيين البؤرتين نوجد هـ أولاً

بما أن $\text{ب}^{\text{٢}} = \text{أ}^{\text{٢}}(\text{هـ}^{\text{٢}} - \text{١})$

$\text{١٦} = \text{٢٥}(\text{هـ}^{\text{٢}} - \text{١})$

$$\frac{\text{١٦}}{\text{٢٥}} = \text{هـ}^{\text{٢}} - \text{١}$$

$$\text{هـ}^{\text{٢}} = \frac{\text{١٦}}{\text{٢٥}} + \text{١}$$

$$= \frac{\text{٤١}}{\text{٢٥}}$$

$$\text{هـ} = \frac{\sqrt{\text{٤١}}}{\text{٥}}$$

بؤرتا القطع هما ≡ (ل + أهـ ، ك) ، (ل − أهـ ، ك)

$$\equiv \left(\text{٢} + \text{٥} \times \frac{\sqrt{\text{٤١}}}{\text{٥}} \text{ ، } -\text{٣}\right) \text{ ، } \left(\text{٢} - \text{٥} \times \frac{\sqrt{\text{٤١}}}{\text{٥}} \text{ ، } -\text{٣}\right)$$

$$\equiv \left(\text{٢} + \sqrt{\text{٤١}} \text{ ، } -\text{٣}\right) \text{ ، } \left(\text{٢} - \sqrt{\text{٤١}} \text{ ، } -\text{٣}\right)$$

معادلة دليلي القطع :

$$\text{س} = \text{ل} + \frac{\text{أ}}{\text{هـ}} \text{ ، } \text{س} = \text{ل} - \frac{\text{أ}}{\text{هـ}}$$

$$\text{س} = \text{٢} + \frac{\text{٥} \times \text{٥}}{\sqrt{\text{٤١}}} \text{ ، } \text{س} = \text{٢} - \frac{\text{٥} \times \text{٥}}{\sqrt{\text{٤١}}}$$

$$\text{س} = \text{٢} + \frac{\text{٢٥}}{\sqrt{\text{٤١}}} \qquad \text{س} = \text{٢} - \frac{\text{٢٥}}{\sqrt{\text{٤١}}}$$

معادله الخطين التقاربين :

$$(ص - ك) = \pm \frac{ب}{أ} (س - ل)$$

$$(ص + ٣) = \pm \frac{٤}{٥} (س - ٢)$$

٥ ص + ١٥ = ٤ س - ٨ ، - ٥ ص - ١٥ = ٤ س - ٨

أي ٥ ص - ٤ س + ٢٣ = ٠ ، ٥ ص + ٤ س + ٧ = ٠

مثال (٤ - ١٧)

في القطع الزائد

$$٩ س^{٢} - ١٦ ص^{٢} - ١٨ س - ٦٤ ص - ١٩٩ = ٠$$

أوجد (أ) إحداثيات مركز القطع

(ب) إحداثيا رأس القطـع

(حـ) إحداثيا بؤرتي القطع

(د) معـــادلة الدليلـــين

(هـ) معادلة الخطين التقاربين

(و) طول الوتر البؤري العمودي

(ز) ارسم شكلا عاماً لهذا القطع

الحـــل :

(أ) بداية نضع القطع في الصورة $\frac{(س - ل)^2}{أ^2} - \frac{(ص - ك)^2}{ب^2} = 1$

وذلك باستخدام طريقة إكمال المربع كما يلي

$9 س^2 - 18 س + 9 - 16 ص^2 - 64 ص - 64$

$= 199 + 9 - 64$

$9 (س^2 - 2 س + 1) - 16 (ص^2 + 4 ص + 4) = 144$

$9 (س - 1)^2 \quad - 16 (ص + 2)^2 \quad = 144$

بالقسمه على ١٤٤ تصبح معادله القطع في الصوره

$\frac{(س - 1)^2}{16} - \frac{(ص + 2)^2}{9} = 1$

وباستخدام طريقة الحل في المثال السابق فإن

مركز القطع ≡ (١ ، −٢)

(ب) رأسا القطع ≡ (٥ ، −٢) ، (−٣ ، −٢)

(جـ) لإيجاد احديثا بؤرتي القطع

$ب^2 = أ^2 (هـ^2 - 1)$

$9 = 16 (هـ^2 - 1)$

$\frac{9}{16} = (هـ^2 - 1)$

$هـ^2 = \frac{25}{16}$

$هـ = \frac{5}{4}$

بؤرتا القطع (٦ ، -٢) ، (-٤ ، -٢)

(د) معادلة الدليلين :

$$س = ل + \frac{أ}{هـ} \quad ، \quad س = ل - \frac{أ}{هـ}$$

$$س = \frac{٢١}{٥} \quad ، \quad س = -\frac{١١}{٥}$$

(هـ) معادلة الخطين التقاربين : $ص - ك = \pm \frac{ب}{أ} (س - ل)$

$$ص + ٢ = \pm \frac{٣}{٤} (س - ١)$$

$$٣س + ٤ص + ٥ = ٠ \quad ، \quad ٣س - ٤ص - ١١ = ٠$$

(و) طول الوتر البؤري العمودي $= \frac{٢ب^{٢}}{أ} = \frac{٢ \times ٩}{٤} = \frac{٩}{٢}$

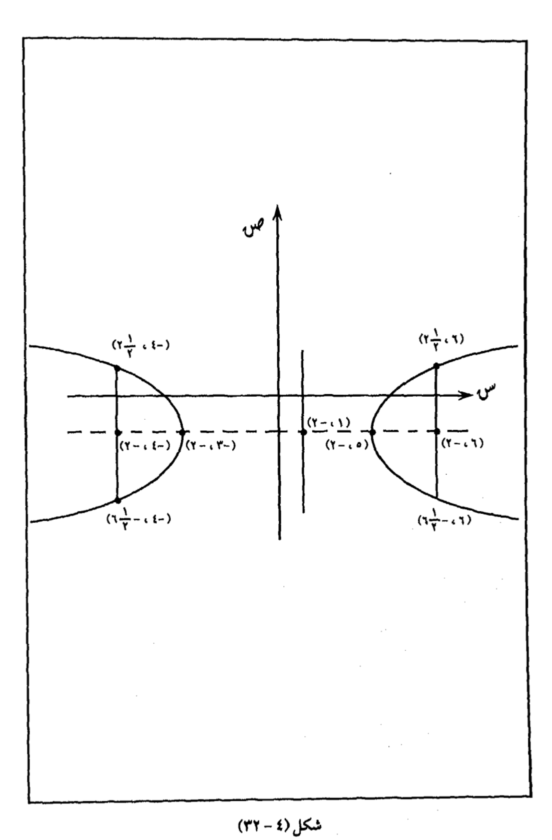
طرفي الوتر البؤري العمودي $\equiv (٦ ، -٢ + \frac{٩}{٢}) ، (٦ ، -٢ - \frac{٩}{٢})$

$\equiv (٦ ، ٢\frac{١}{٢}) ، (٦ ، -٦\frac{١}{٢})$

، طرفي الوتر البؤري العمودي المقابل $\equiv (-٤ ، -٢ + \frac{٩}{٢}) ، (-٤ ، -٢ - \frac{٩}{٢})$

$\equiv (-٤ ، ٢\frac{١}{٢}) ، (-٤ ، -٦\frac{١}{٢})$

(ز) وباستخدام النقط المستخدمة يمكن رسم الشكل العام للقطع كما يلي :



شكل (٤ – ٣٢)

مثال (٤ - ١٨) :

أوجد معادلة المماس والعمودي للقطع الزائد

٩ س٢ - ١٦ ص٢ = ١٤٤   عند نهايتي احد الوترين البؤريين العمودين

الحـــل :

لحل هذا المثال نحتاج إلى مرحلتين :

المرحلة الأولى : نعين فيها الأطراف الاربعه للوترين البؤريين العمودي

وهي النقط الاربعه المطلوب تعيين معادلة المماس عندها

وذلك على النحو التالي :

معادلة القطع هي $\frac{س^{٢}}{١٦} - \frac{ص^{٢}}{٩} = ١$

$أ^{٢} = ١٦ \Leftarrow أ = ٤$

$ب^{٢} = ٩ \Leftarrow ب = ٣$

مركز القطع (٠ ، ٠) لإيجاد إحداثيا بؤرتي القطع

$ب^{٢} = أ\ (هـ^{٢} - ١)$

$٩ = ١٦\ (هـ^{٢} - ١)$

$\frac{٩}{١٦} = هـ^{٢} - ١$

$هـ^{٢} = \frac{٢٥}{١٦}$

$هـ = \frac{٥}{٤}$

إذن بؤرتي القطع ≡ (ل + هـ أ ، ك) ، (ل − هـ أ ، ك)

$$\equiv \left(\text{٠} + \frac{\text{٥}}{\text{٤}} \times \text{٤} \text{ ، ٠}\right) \text{ ، } \left(\text{٠} - \frac{\text{٥}}{\text{٤}} \times \text{٤} \text{ ، ٠}\right)$$

≡ (٥ ، ٠) ، (−٥ ، ٠)

$$\text{طول الوتر البؤري العمودي} = \frac{\text{٢ب}^{\text{٢}}}{\text{أ}} = \frac{\text{٢} \times \text{٩}}{\text{٤}} = \frac{\text{٩}}{\text{٢}}$$

أطراف أحد الوترين البؤرين

$$\left(\text{٥ ، } \frac{\text{٩}}{\text{٤}}\right) \text{ ، } \left(\text{٥ ، } -\frac{\text{٩}}{\text{٤}}\right)$$

المرحلة الثانية

نوجد الميل من المشتقة الأولى للداله

$$\text{١٨س} - \text{٣٢ص} \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{٠}$$

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{\text{١٨ س}}{\text{٣٢ص}}$$

$$\text{م} = \frac{\text{٩}}{\text{١٦}} \cdot \frac{\text{س}}{\text{ص}}$$

$$\text{م}_{\text{١}} = \frac{\text{٩}}{\text{١٦}} \times \frac{\text{٥}}{\text{٩}} \times \text{٤} = \frac{\text{٥}}{\text{٤}} \qquad \text{م}_{\text{٢}} = \frac{\text{٩}}{\text{١٦}} \times \frac{\text{٥} \times -\text{٤}}{\text{٩}} = \frac{-\text{٥}}{\text{٤}}$$

$$\text{معادلة المماس عند النقطة الأولى} \qquad \text{ص} - \frac{\text{٩}}{\text{٤}} = \frac{\text{٥}}{\text{٤}} (\text{س} - \text{٥})$$

٤ص − ٥س + ١٦ = ٠

$$\text{معادلة المماس عند النقطة الثانية} \qquad \text{ص} + \frac{\text{٩}}{\text{٤}} = \frac{-\text{٥}}{\text{٤}} (\text{س} - \text{٥})$$

٤ص + ٥س − ١٦ = ٠

تمارين (٤ - ٤)

(١) إذا عملت أن الاختلاف المركزي لقطع زائد ما = ٣ وحده وأن بعد بؤرته عن دليل مناظر = ٥ وحدات فأوجد معادله القطع منسوبة إلى محوريه .

(٢) قطع زائد طول وتره البؤري العمودي = ٢ وطول نصف محوره المرافق = ٣ أوجد معادلته منسوبه إلى محوريه .

(٣) أوجد معادله القطع الزائد إذا علمت أن :

معادلة محوره القاطع هي س = ٣ وطوله يساوي ٦ وحدات

ومعادلة محوره المرافق هي ص = - ٥ وطوله يساوي ١٠ وحدات .

(٤) أوجد معادله القطع الزائد الذي يمر بالنقطه (٣ ، ٢) إذا كان

معادلة خطاه التقاربيان هما ص = ± $\sqrt{٣}$ س .

(٥) أ هي النقطه (- ١ ، ٢) ، ب هي النقطة (٦ ، ٤) ، حـ نقطة تتحرك في مستويهما فإذا عملت أن | حـ أ | - | حـ ب | = ١٢

فاثبت أن المحل الهندسي للنقطة جـ هو قطع زائد وأوجد كلا من بؤريته وخطيه المتقاربيين .

(٦) أوجد معادلة القطع الزائد إذا علمت أن اختلافه المركزي = $\frac{٥}{٢}$

وإن إحداثيات بؤرته هي (٥ ، ٠) ومعادلة دليله المناظر هي ٣ س - ٤ = ٠

(٧) أ هي النقطة (٢ ، - ١) ، ب هي النقطة (٣ ، ٤) ، حـ نقطة تتحرك في مستويهما فإذا عملت أن حاصل ضرب ميلي حـ أ ، حـ ب = $\frac{٣}{٢}$

فاثبت إن المحل الهندسي لنقطة أ هو قطع زائد وأوجد إحداثيات كل من المركز والبؤره .

(٨) في القطع الزائد

$$\frac{(س + ٢)^٢}{٩} - \frac{(ص - ١)^٢}{١٦} = ١$$

أوجد كل من :

أ- إحداثيات المركز

ب- إحدثيات رأس القطع

جـ- إحداثيات بؤرتي القطع

د- معادلة خطي التقارب

(٩) أوجد معادلة المماس والعمودي عليه للقطع الزائد

$س^٢ - ٢ص^٢ + ٢س = ٠$ عند النقطة (٢ ، ٢)

(١٠) أوجد معادلة المماسان المشتركة للقطعين

$$\frac{س^٢}{أ^٢} - \frac{ص^٢}{ب^٢} = ١ \quad ،$$

$$\frac{ص^٢}{أ^٢} - \frac{ص^٢}{ب^٢} = ١$$

المصطلحات الرياضية

الباب الأول

Analytic geometry	هندسة تحليلية
Area	مساحة
Bisector	منصف
Centroid of the triangle	نقطة تلاقي المستقيمات المتوسطة للمثلث
Determinant	محدد
Distance	المسافة
Division point	نقطة تقسيم
Equation	معادلة
Graphical representation	تمثيل بياني
Homogeneous equation	معادلة متجانسة
Horizontal axis	محور أفقي
Intercept form	صور المقطعين
Loucus of an equation	المحل الهندسي لمعادلة
Mid point	نقطة تنصيف
Parallel	متوازية
Passes throught	يمر خلال
Pencil of staight lines	عائلة الخطوط المستقيمة
Perpendicular	عمودي
Plot a curve	يرسم منحنى
Point of intersection	نقطة التقاطع
Point - slope form	صورة الميل ونقطة
Rectangular axes	محاور متعامدة
Rectangular coordinates	أحداثيات متعامدة
Slope	الميل
Slope - intercept form	صورة الميل والجزء المقطوع

Standard form	صورة قياسية
Straight line	خط مستقيم
The angle of inclination	زاوية الميل
Two - points form	صورة النقطتين
Vertex	رأس
Vertical axis	محور رأسي

الباب الثاني

Center	مركز
Chord	وتـر
Circle	دائرة
Circumference	محيط
Coaxal circles	دوائر متحدة المحور
Conjugate points	نقط مترافقة
Diameter	قطر
Divergence	تباعد
Eigen - conjugate triangle	مثلث مترافق ذاتي
Joachimsthal's equation	معادلة يوخمشتال
Length	طول
Origin	نقطة أصل
Orthogenally	على التعامد
Polar line	خط قطبي
Quaternary	رباعي
Radical axis	محور أساسي
Radical center	مركز أساسي
Radius	نصف قطر
Tangent	مماس
Tangent chord	وتر التماس

البالب الثالث

Changing of coordinates	تغيير الأحداثيات
Conic sections	قطاعات مخروطية
Directrix	دليل
Eccentricity	الاختلاف المركزي
Focus	بؤرة
Geometrical properties	خواص هندسية
Latus rectum	وتر بؤري عمودي
Matrix form	صورة مصفوفية
Parabola	قطع مكافئ
Rotation of axes	دوران المحاور
Subnormal	تحت العمودي
Subtangent	تحت المماس
Transformation of axes	تحويل المحاور
Translation of axes	انتقال المحاور

الباب الرابع

Asymptotes	الخطوط التقاربية
Conjugate	مرافق
Conjugate axis	المحور المرافق
Ellipse	القطع الناقص
Hyperbola	القطع الزائد
Major axis	المحور الرئيسي
Right angle	زاوية قائمة
Set	مجموعة
Transverse axis	المحور القاطع

المـــراجـــع

المراجع

[١] حساب التفاضل والتكامل والهندسة التحليلية ، الجزء الثاني ، ترجمة موفق دعبول وآخرون ، تأليف ج . ب . توماس ١٩٧٤ .

[٢]حساب التفاضل والتكامل والهندسة التحليلية ، ترجمة د . محمد علي السمري ، تأليف وليم هـ . دورفي ، ١٩٨٤ .

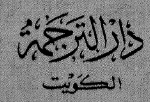
[3] Analytical Geometry, Barry Spain, Pergamon Press, New York, 1963.

[4] Analytic Geometry, Theory and Problems, Schoum's outline series, Joseph H. Kindle, New York, 1950.

[5] Calculus with Analytic Geometry, Earl W. Swokowski, Prindle, Weber & Schmidt, U.S.A, 1984.

[6] Calculus with Analytic Geometry, Howard Anton, John Wiley and Sons, New York, 1980.

تم بحمد اللّه


دار الترجمة
الكويت